

# 考虑双重硬约束与未知扰动的二阶微电网预设时间分布式资源分配

## 摘要

本文针对存在未知集总扰动的二阶微电网系统在时变成本函数下的分布式资源分配问题,提出一种兼顾双约束、强抗扰与预设时间收敛的分布式最优控制算法。所研究的系统采用完全分布式架构,各智能体仅通过邻居间通信及本地状态信息即可实现全局优化目标,且可同时满足功率输出限值与爬坡率双重约束。算法设计层面,首先采用带时变参数的对数障碍函数,将局部功率边界及相邻节点间非可分网络耦合输电容量约束转化为目标函数的惩罚项,通过引出障碍梯度爆炸机制在数学上严格证明了可行域的正不变性,确保迭代全过程零约束违规;其次,设计动态事件触发的三阶分布式平均追踪 (DAT) 算法,实现对时变成本函数一阶梯度、海森矩阵及混合偏导的精准协同估计,利用时变衰减阈值与绝对触发下界设计,在降低系统通信开销的同时彻底避免芝诺现象;在此基础上,针对底层物理系统面临的强耦合非线性集总扰动,提出一种指数型分数阶预设时间扩张状态观测器 (PT-ESO),通过引入量化标称常数解决了指数项物理量纲一致性问题,并仅利用本地可测状态在预设时间内实现对未知时变扰动的精准重构与前馈补偿;最后,结合全局寻优信息与底层抗扰补偿,提出基于滑动流形的预设时间收敛算法,利用积分发散的时变增益设计,保证所有智能体在预设时间内精确收敛至全局最优时变轨迹的极小邻域。基于李雅普诺夫函数的级联系统输入状态稳定性 (ISS) 理论严格验证了闭环系统的收敛性。在存在近壁效应与吸地效应极端物理扰动下的无人机进行了 PT-ESO 算法的实物验证,微电网发电场景下的仿真结果表明,所提控制框架可同时实现全局发电成本最小化、局部与耦合约束严格满足、强扰动下高精度追踪以及系统状态预设时间收敛,具有重要的工程应用价值。

**关键词:** 分布式资源分配, 非可分网络耦合约束, 预设时间收敛, 扩张状态观测器 (ESO), 动态事件触发机制, 级联输入状态稳定性。

## 1 引言

多智能体系统是指由多个智能体组成的系统。每个智能体都有自己的感知、决策和行动能力,并且可以通过与其他智能体进行通信和协作来实现系统的控制目标。多智能体系统具有分布式、并行、协同和自治等特点。

多智能体系统的分布式资源分配中,各智能体围绕输出功率、路权等有限资源自主决策。无需中央控制,智能体凭局部感知获取资源状态,通过分布式通信传递需求,结合任务目标制定分配策略,同时借路径错峰等机制规避冲突。动态场景下可实时调整,实现个体效用与全局资源效率的协同优化。

分布式优化能够将大规模问题分解为多个较小的子问题，以便于求解。它在多智能体系统中得到了应用，例如多机器人协作 [1],[21]、联网车辆系统 [2],[19]、分布式一致性协议 [3]、智能电网 [4],[20] 等，引起了学者们的极大兴趣。分布式资源分配 (DRA) 问题就是分布式优化的一方面，其目标是通过局部决策变量确定的成本函数的总和最小化，同时满足与全局决策变量相关的等式约束，以实现最优解。关于 DRA 的各种研究成果既存在于离散时间 [5]、[6] 中，也存在于连续时间 [7] 中。研究中涉及的问题包括动力学方程 [8],[20],[22] 以及干扰 [9] 等。然而，现有大多数连续时间 DRA 研究通常假设智能体为理想的一阶积分器模型，忽略了实际微电网中发电机组固有的二阶转子动力学特性。近期，文献 [22] 和 [24] 针对高阶与二阶智能体的约束资源分配开展了有益的探索。尽管近年来在滑模控制框架下给出了预设时间收敛的二阶分布式优化算法 [29,30]，但在同时应对高速时变最优解的高精度追踪和强耦合非线性未知外部扰动方面，仍存在进一步突破的空间。

自从 1997 年 Frank Kelly 发表《Charging and Rate Control for Elastic Traffic》以及 1998 年 Bertsekas and Tsitsiklis 合著的《Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods》以来，分布式优化理论和方法在资源分配领域获得了巨大发展，并在通信网络、智能电网、云计算和多智能体系统等领域中产生深远影响。近年来，分布式优化在资源分配与控制领域的关键作用愈发凸显，不仅为网络效用最大化、以及资源分配提供了坚实理论基础，也为在去中心化环境下实现高效、可靠的资源分配奠定了方法保障。

目前大多数研究成果提供的时不变成本函数的最优解。然而，在实际应用中，成本函数往往会随时间变化，因此系统的最优解是一个随时间变化的轨迹。在 [10] 中，提出了一种在连续时间中解决具有等式约束的时变优化的基于边的自适应算法，该算法包括对总成本函数的梯度进行估计以及一个时间缩放函数的提出实现预设时间达到最优状态轨迹。基于 [10]，在 [11] 中提出了一种加入投影算子的算法，用于受一阶约束的时变成本的最优资源分配。并且 [12] 提出了一种分布式方法，用于处理时变的通信拓扑下，但是成本函数为时不变的分布式资源分配问题。

在处理预设时间的分布式优化方向，[13] 使用了很少的参数的两阶段的滑动流形算法实现了预设时间编队控制。更进一步的，[14] 使用了基于边权重的自适应的滑动流形算法实现了一阶段的预设时间分布式最优。这两个文章都是显式的使用了海森矩阵的，这毫无疑问会加大计算量。[15][16] 是不需要使用海森矩阵的，其中 [15] 不需要海森矩阵也不需要梯度的时间导数，[16] 考虑的是在有向图上的不要海森矩阵的分布式时变资源分配问题。另一方面，针对多智能体系统底层物理模型的扰动抑制问题，虽然已有部分研究引入了扩张状态观测器 (ESO) 或滑模控制，但传统的 ESO 多为渐近收敛或依赖于常数高增益，难以在严格的预设时间内实现对高速时变扰动的精确估计，且容易在底层物理执行机构中引发剧烈抖振，无法与上层预设时间优化算法实现理论框架的紧密耦合。

为了克服上述局限，本文提出一种“上层分布式优化 + 底层预设时间抗扰”的串级信息物理控制架构。在上层信息层，设计了基于动态事件触发的三阶分布式平均追踪 (DAT) 算法，通过仅依赖邻居通信与本地状态，在预设时间  $T_E$  内实现对全局平均一阶梯度、海森矩阵及时变混合偏导的精准协同估计；动态事件触发机制 [37,38] 在自适应调整通信频率的同时，以严格正的绝对触发阈值下界彻底排除芝诺 (Zeno) 现象 [39]。在底层物理层，提出了一种指数型分数阶预设时间扩张状态观测器 (PT-ESO)，通过引入量量标称常数解决了指数非线性项的物理量纲一致性——这一本质的物理约束在已有非线性 ESO 设计中普遍被忽视；同时，平滑鲁棒补偿项在不破坏系统连续性的前提下，有效消除了未知扰动导数带来的稳态滞后。最后，基于积分发

散时变增益设计的预设时间滑动流形控制器，驱动所有智能体在预设总时间  $T_c$  内收敛至时变全局最优解的极小邻域，并通过对数障碍函数与级联输入状态稳定性（ISS）理论，严格证明了局部功率约束、爬坡率约束及耦合线路传输约束在全过程中的严格满足。

本文的主要贡献总结如下。

1. **贡献 1：兼顾双重物理硬约束与耦合网络约束的统一优化框架。**与现有仅处理可分解箱型约束的工作 [7, 9–12, 21, 23] 本质不同，本文首次在预设时间分布式优化框架内同时处理三类约束——局部功率约束、爬坡率约束（经  $\tanh$  平滑饱和映射强制满足）以及耦合线路传输约束  $x_i + x_j \in [C_{ij}^{\min}, C_{ij}^{\max}]$ 。针对耦合约束导致的可行域非笛卡尔（Cartesian）积结构，通过将邻居状态嵌入事件触发通信向量，并基于障碍函数梯度爆炸与 ISS 有界收敛的矛盾论证，严格证明了耦合可行域的正不变性，保证了寻优及物理运行全过程零约束违反。
2. **贡献 2：串级信息物理架构与预设时间收敛的严格理论保证。**提出上层分布式优化（信息层）+ 底层 PT-ESO 抗扰（物理层）的双层级联控制框架。通过对信息层和物理层的时域进行严密解耦设计（严格要求预设估计时间  $T_E < \text{预设优化时间 } T_c$ ），避免了级联系统中的时间尺度混淆。基于 ISS 级联稳定性理论，在不需要奇异摄动时间尺度分离假设的前提下，严格证明了闭环系统内所有误差信号均在预设时间  $T_c$  内收敛至全局最优解的极小邻域。
3. **贡献 3：无量纲化预设时间扩张状态观测器（PT-ESO）。**提出了一种指数型分数阶非线性观测器，其核心创新在于引入速度量纲标称常数  $e_{v,0}$ ，确保指数项  $\exp(|e_{v,i}/e_{v,0}|^{2s})$  为无量纲纯数——解决了传统非线性 ESO [33–35] 中将量纲物理量直接代入指数函数的物理量纲一致性问题。精准观测与前馈补偿。与现有预设时间 ESO 工作 [36] 相比，本文 PT-ESO 采用时间自治（autonomous）设计，不显式依赖于发散时变增益，从根本上规避了物理执行层在收敛末期的奇异性风险。
4. **贡献 4：基于动态事件触发的三阶 DAT 与 Zeno-free 保证。**设计了对全局平均梯度、海森矩阵和时变混合偏导进行同步估计的三阶分布式平均追踪（DAT）算法。与现有仅估计梯度的 DAT 方案 [10, 40, 41] 以及无海森矩阵的规避策略 [15, 16, 42] 相比，三阶架构为预设时间滑动流形控制器提供了完整的曲率信息与时变趋势信息，显著提升了追踪精度与收敛速度。动态事件触发机制的相对阈值  $\delta(t)$  呈指数衰减、绝对触发阈值  $\varepsilon(t)$  结合时间缩放函数自适应调整，并以严格正的硬性下界  $\varepsilon_{\min} > 0$  保证了任意两次触发之间的时间间隔严格为正 [37–39]，从理论和仿真双层面彻底排除了芝诺（Zeno）现象。

表 1 系统比较了本文所提算法与现有代表性文献在九个关键维度上的差异。如表中所示，本文方法在所有九个维度上展现了较为全面的功能设计。特别地，耦合线路传输约束（Coupled Line-Flow Constraints）与预设时间扩张状态观测器（PT-ESO）两个维度是现有文献中从未被同时处理过的。

本文其余部分组织如下：第 2 节建立问题模型与增广成本函数；第 3 节设计基于动态事件触发的三阶 DAT 算法并给出预设时间收敛性证明；第 4 节提出 PT-ESO 的设计与收敛性分析；第 5 节推导预设时间滑动流形控制器并完成级联 ISS 闭环收敛性证明；第 6 节通过无人机管道近壁飞行硬件实验、4 机微电网仿真、IEEE-118 节点 30 机大规模仿真以及含强耦合扰动与网络耦合约束的综合仿真，全面验证所提框架的有效性；第 7 节给出结论。

表 1: 本文方法与现有代表性文献的系统性比较

| 参考文献     | 时变成本 | 局部约束         | 耦合约束              | 动力学   | 扰动观测器       | 收敛速率    | 通信机制    | 严格可行性    | 硬件验证    |
|----------|------|--------------|-------------------|-------|-------------|---------|---------|----------|---------|
| [5, 6]   | ×    | ×            | ×                 | 一阶    | ×           | 渐近/次线性  | 周期/连续   | ×        | ×       |
| [8, 17]  | ×    | ×            | ×                 | 一阶    | ×           | 渐近      | 连续      | ×        | ×       |
| [7, 9]   | ✓    | ✓ (功率)       | ×                 | 一阶    | ×           | 渐近/有限时间 | 连续      | ×        | ×       |
| [10]     | ✓    | ✓ (等式)       | ×                 | 一阶    | ×           | 预设时间    | 连续      | ×        | ×       |
| [11]     | ✓    | ✓ (功率)       | ×                 | 一阶    | ×           | 有限/固定时间 | 连续      | ×        | ×       |
| [1, 13]  | ×    | ×            | ×                 | 一阶    | ×           | 预设时间    | 事件触发/连续 | ×        | ×       |
| [14]     | ×    | ×            | ×                 | 一阶    | ×           | 固定时间    | 连续      | ×        | ×       |
| [15]     | ✓    | ×            | ×                 | 一阶    | ×           | 固定/预设时间 | 周期      | ×        | ×       |
| [16]     | ✓    | ×            | ×                 | 一阶    | ×           | 预设时间    | 连续      | ×        | ×       |
| [21]     | ×    | ✓ (功率)       | ×                 | 二阶/高阶 | ×           | 渐近      | 连续      | ✓        | ×       |
| [23]     | ×    | ✓ (功率)       | ×                 | 二阶    | ×           | 渐近      | 连续      | ✓        | ×       |
| [22, 24] | ✓    | ×            | ×                 | 二阶    | ✓ (渐近/固定时间) | 渐近/固定时间 | 连续      | ×        | ✓ (无人机) |
| 本文方法     | ✓    | ✓ (功率 + 爬坡率) | ✓ ( $x_i + x_j$ ) | 二阶    | ✓ (PT-ESO)  | 预设时间    | 动态事件触发  | ✓ (正不变集) | ✓ (无人机) |

## 主要符号说明

## 2 问题描述与系统建模

### 2.1 通信网络拓扑模型

本文中的电力系统由分布式发电机组组成，我们把发电机组组成的通信拓扑用图来表示，值得注意的是，网络拓扑 (cyber topology) 和物理拓扑 (physical topology) 是不一样的。连通图:  $G = (V, E)$ ，其中  $V$  表示  $N$  个节点的集合，每个无向边  $\{i, j\} \in E$  表示节点  $i$  和节点  $j$  之间的通信链路。加权邻接矩阵:  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ，其中  $a_{ii} = 0$ ，如果  $(i, j) \in E$  则  $a_{ij} > 0$ ，否则  $a_{ij} = 0$ 。Laplacian 矩阵:  $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ，其中  $l_{ij} = -a_{ij}$  对于  $i \neq j$ ， $l_{ii} = \sum_j a_{ij}$ 。本文考虑的是无向连通图。

Property 1: 对于连通图  $G$ ，Laplacian 矩阵  $L$  具有以下性质:  $L$  是半正定矩阵，且  $\lambda_1(L) = 0 < \lambda_2(L) \leq \dots \leq \lambda_N(L)$ ；对于  $x = [x_i]^T \in \mathbb{R}^n$  和  $y \in \mathbb{R}^n$ ，有  $x^T L x = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} (x_i - x_j)^2$ ，以及  $\sum_{i,j} a_{ij} x_i (y_i - y_j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} (x_i - x_j)(y_i - y_j)$ ；如果  $\mathbf{1}_N^T x = 0$ ，则  $x^T L x \geq \lambda_2(L) x^T x$ 。

Property 2: 存在一个正的左特征向量  $\varsigma = (\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_N)^T$  使得  $\varsigma^T L = \mathbf{0}_N^T$  和  $\sum_{i=1}^N \varsigma_i = 1$  成立。

### 2.2 系统动力学模型与增广成本函数构建

考虑由  $N$  台分布式发电机组组成的二阶微电网系统，第  $i$  台发电机组的二阶转子动力学模型可表示为如下状态空间形式：

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i,1}(t) &= x_{i,2}(t) \\ \dot{x}_{i,2}(t) &= u_i(t) + D_i(t) \end{aligned} \tag{1}$$

其中， $x_{i,1}(t) \in \mathbb{R}$  为发电机组有功功率输出（位置状态）； $x_{i,2}(t) \in \mathbb{R}$  为机组有功功率爬坡率（速度状态）； $u_i(t)$  为控制输入； $D_i(t)$  为未知外部集总扰动。

**Assumption 1 (初始可行性与正不变集):** 各发电机组有功功率的初始值严格处于物理边界与安全约束的内部，即对于所有  $i \in V$ ，有  $P_i^{min} < x_{i,1}(0) < P_i^{max}$ 。本文通过在优化层中引



| Symbol   | Description  |
|--|--|
| <b>1. Graph Theory &amp; Network Symbols</b>                           |  |
| $G = (V, E), A, L$   | Communication graph, adjacency matrix, and Laplacian matrix                      |
| $a_{ij}, \lambda_2(L)$   | Edge weight between agents $i$ and $j$ , and algebraic connectivity of Laplacian |
| <b>2. System Dynamics &amp; Dual Constraints</b>                       |  |
| $x_{i,1}(t), x_{i,2}(t)$   | Active power output (position) and power ramp rate (velocity) of agent $i$       |
| $u_i(t), u_i^{raw}(t)$   | Tanh-saturated physical control input, and nominal control output                |
| $D_i(t), \hat{D}_i(t)$   | Unknown lumped physical disturbance, and PT-ESO estimated disturbance            |
| $P_i^{min}, P_i^{max}$   | Lower and upper physical limits for local power output                           |
| $R_i^{min}, R_i^{max}$   | Lower and upper physical limits for local power ramp rate                        |
| $C_{ij}^{min}, C_{ij}^{max}$   | Lower and upper limits for line-flow transmission coupled capacity               |
| <b>3. Logarithmic Barrier Functions</b>                                |  |
| $f_i, \tilde{f}_i$   | Original time-varying cost function, and augmented cost function                 |
| $B_{local,i}, B_{coupled,i}$   | Local power boundary barrier term, and network coupled line flow barrier term    |
| $c_i(t), \varpi_i(t)$  | Time-varying penalty parameter, and time-varying slack scaling variable          |
| <b>4. Distributed Average Tracking &amp; Event-Triggered Mechanism</b> |  |
| $y_i^g(t), y_i^h(t), y_i^m(t)$   | Local DAT estimates of global gradient, Hessian, and mixed derivatives           |
| $\varphi_i(t), \Theta_i(t), \Upsilon_i(t)$                             | Internal auxiliary consensus states for DAT iterations                           |
| $t_k^i, y_{i,k}$   | Discrete event-triggered moments, and broadcasted status vectors                 |
| $\delta(t), \varepsilon(t)$  | Time-varying relative and absolute ETM thresholds                                |
| <b>5. Predefined-Time Control &amp; PT-ESO</b>                         |  |
| $T_c, T_{eso}$   | User-prescribed convergence bounds for optimization and PT-ESO                   |
| $\kappa(t), \gamma(t)$   | Time-scaling function (TSF), and time-varying DAT coupling gain                  |
| $\Psi(\cdot)$  | Dimensionless exponential fractional-order smooth mapping function               |
| $e_{v,i}(t), \tilde{D}_i(t)$   | Velocity observation error, and estimation error of lumped disturbance           |

入对数障碍函数并结合稳定性分析，论证此可行域是一个正不变集（Positively Invariant Set）。任何状态轨迹若逼近边界，都会引发李雅普诺夫能量函数发散，从而在数学上彻底阻止状态脱离可行域，保证迭代全过程的可行性。

具体而言，针对第  $i$  个智能体，构造包含局部功率约束与网络耦合约束的增广成本函数  $\tilde{f}_i(x_{i,1}, t)$  如下：

$$\tilde{f}_i(x_{i,1}, t) = f_i(t, x_{i,1}) + \frac{1}{c_i(t)} \left[ B_{local,i}(x_{i,1}, t) + B_{coupled,i}(x_{i,1}, x_{j,1}, t) \right] \quad (2)$$

其中， $B_{local,i}$  为处理局部功率上下限的障碍项：

$$B_{local,i} = -\ln(\varpi_i(t) - x_{i,1} + P_i^{max}) - \ln(\varpi_i(t) + x_{i,1} - P_i^{min}) \quad (3)$$

$B_{coupled,i}$  为处理相邻节点传输容量的耦合障碍项：

$$B_{coupled,i} = \sum_{j \in N_i} \left[ -\ln(\varpi_i(t) - (x_{i,1} + x_{j,1}) + C_{ij}^{max}) - \ln(\varpi_i(t) + (x_{i,1} + x_{j,1}) - C_{ij}^{min}) \right] \quad (4)$$

为了在保证完全分布式的同时降低通信带宽开销，本文将相邻节点的物理状态  $x_{j,1}$  封装于统一的动态事件触发通信向量中。

**Remark 1 (对数障碍函数与控制屏障函数 (CBF) 的对比及取舍)：**在现有约束多智能体协同控制中，控制屏障函数 (CBF) [31,32] 常用于通过在线求解二次规划 (QP) 来保证安全约束。然而，CBF 方法通常要求各智能体具有高频实时求解 QP 的计算能力，且难以在具有预设时间收敛要求的分布式优化框架中实现解析设计。相比之下，本文采用的对数障碍函数 (Log-barrier) 直接将状态约束转化为包含时变惩罚参数的无约束惩罚项，能够将可行域物理边界产生的“虚拟斥力”直接嵌入到梯度与海森矩阵估计通道中，不仅避免了在线求解高复杂度 QP 的计算开销，还为实现预设时间级联 ISS 稳定性的解析论证提供了可能。

式中，时变参数设计为：

$$c_i(t) = \sigma_{i1} e^{\sigma_{i2} t}, \quad \varpi_i(t) = \sigma_{i3} e^{-\sigma_{i4} t} \quad (5)$$

式中常数  $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}, \sigma_{i4} > 0$ 。

为了防止由于  $c_i(t)$  增长过慢而导致最优解产生解的偏差，在算法设计中，势垒增长速率参数需严格满足协调性约束： $\sigma_{i2} \geq \frac{3}{T_c}$ 。这保证了在逼近预设收敛时间  $T_c$  时，惩罚比重  $\frac{1}{c_i(t)}$  已经衰减至足够小的邻域（例如  $e^3 \approx 20$  倍），确保最终解能够严格、高精度地重合于真实约束最优解。

**Remark 2: 爬坡率硬约束的后置处理机制**对于发电机爬坡率约束  $R_i^{min} \leq \dot{x}_{i,1}(t) \leq R_i^{max}$ ，本文在后续的分布式协同控制器中，将原始计算所得的标称控制输入  $u_i^{raw}(t)$  利用双曲正切函数 (tanh) 进行光滑拓扑映射。具体映射律设计为：

$$u_i(t) = \frac{R_i^{max} - R_i^{min}}{2} \tanh \left( \frac{2u_i^{raw}(t) - (R_i^{max} + R_i^{min})}{R_i^{max} - R_i^{min}} \right) + \frac{R_i^{max} + R_i^{min}}{2} \quad (6)$$

通过该映射，在物理层面强制且平滑地将实际下发的爬坡率指令  $u_i(t)$  限制在许可的开区间  $(R_i^{min}, R_i^{max})$  内。双曲正切函数提供了一种渐进（软）饱和机制，它允许在机组发生极限爬坡等暂态调整时，平滑且鲁棒地提供输入保护。在工程实践中，物理设备的硬界限（如转子疲劳极限）通常宽于设计算法时的保护裕度，因而这种渐进安全设计既避免了物理边界越限，又提供了极高的暂态抗冲缓冲能力。

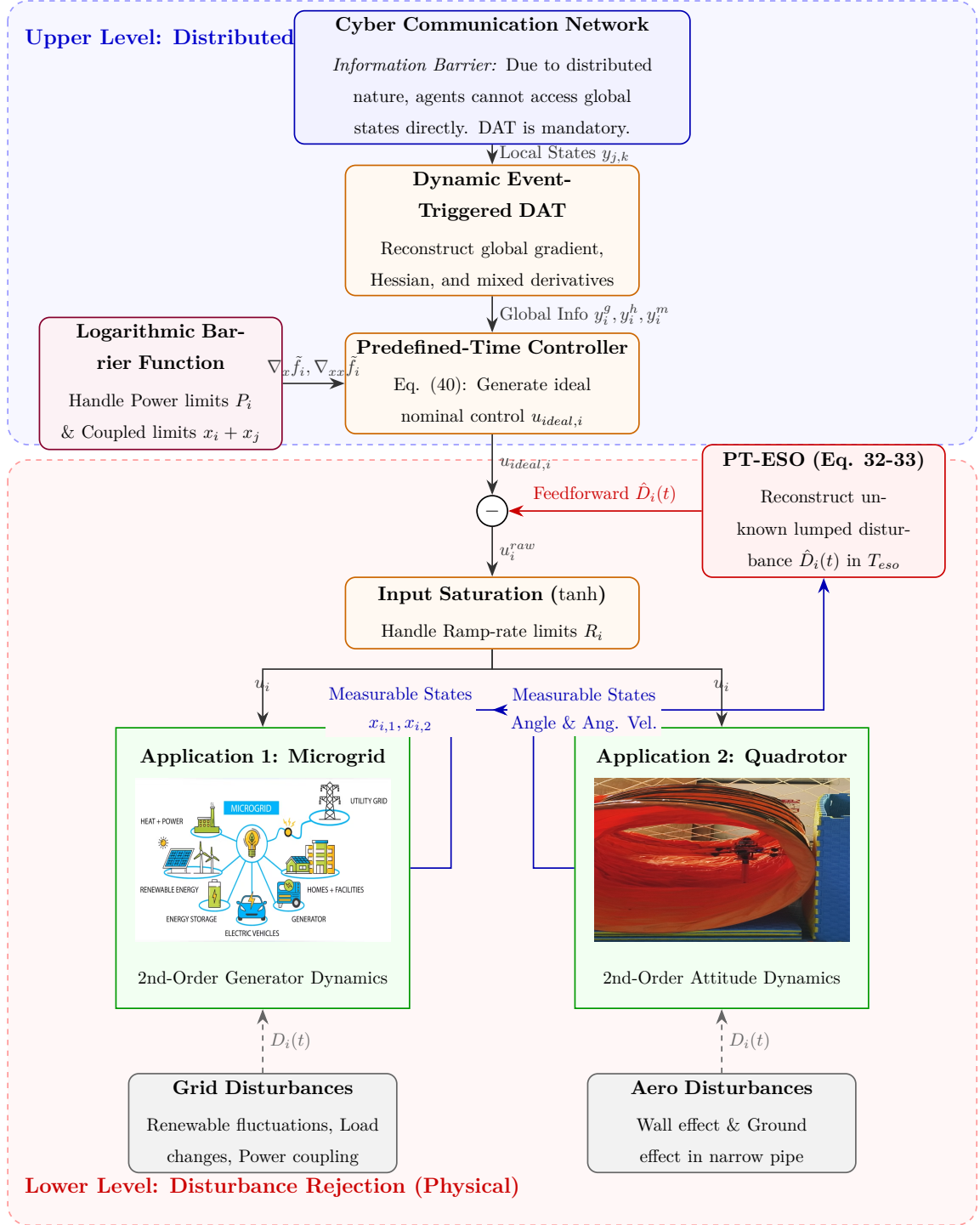


图 1: The proposed Cyber-Physical System (CPS) cascaded control framework. The upper layer utilizes DAT to overcome the information barrier for predefined-time optimization, while the lower layer utilizes PT-ESO to actively reject strong physical disturbances (e.g., power fluctuations in microgrids and wall effects in UAV pipe flights).

### 3 基于动态事件触发的分布式平均追踪法设计

为了使本级联 Cyber-Physical System 时间常数完全对齐, 避免尺度混淆, 我们对系统时域进行严密解耦设计。系统运行分为两个级联阶段:

1. **分布式估计时域**  $t \in [0, T_E]$ : 上层分布式估计器 (DAT) 与底层非线性观测器 (PT-ESO) 运行并在预设时间  $T_E$  (或  $T$ ) 内完全收敛。本节采用的时间缩放函数  $\kappa(t)$  定义在此时域  $[0, T_E]$  内。
2. **分布式优化时域**  $t \in [T_E, T_c]$ : 各智能体在获得高精度无偏估计值后, 级联滑动流形控制器驱动系统状态收敛至全局时变最优解。优化层的时间缩放函数  $\kappa_c(t)$  定义在时域  $[0, T_c]$  内。在此级联拓扑中, 我们严格施加前提约束:  $T_E < T_c$ 。

**Assumption 2:** 针对估计层的收敛设计, 本文引入一种时间缩放函数 (Time-Scaling Function, TSF)  $\kappa(t)$ , 满足以下条件:

1. 定义域为  $t \in [0, T)$ , 其中  $T = T_E$  为分布式估计收敛时间上界;
2. 时间缩放函数及其一阶导数表达式设计为:

$$\kappa(t) = \frac{T^2}{(T-t)^2}, \quad \dot{\kappa}(t) = \frac{2T^2}{(T-t)^3} \quad (7)$$

3. 函数特性满足:  $\kappa(t)$  在  $t \in [0, T)$  上连续可微、严格单调递增, 且  $\lim_{t \rightarrow T} \kappa(t) = +\infty$ 。

基于上述时间缩放函数, 设计分布式平均追踪 (DAT) 算法的时变耦合增益  $\gamma(t)$  为:

$$\gamma(t) = \theta_1 + \theta_2 \frac{\dot{\kappa}(t)}{\kappa(t)} \quad (8)$$

where  $\theta_1, \theta_2 > 0$ 。

针对 DAT 算法中需要估计的三类核心变量, 定义第  $i$  台发电机的本地状态向量  $y_i(t)$  为:

$$y_i(t) = \left[ \nabla_{x_i} \tilde{f}_i(x_{i,1}, t)^T, \text{vec}(\nabla_{x_i x_i} \tilde{f}_i(x_{i,1}, t))^T, \nabla_{x_i t} \tilde{f}_i(x_{i,1}, t)^T \right]^T \quad (9)$$

为了有效降低系统通信开销, 本文设计了基于时间与误差双驱动的动态事件触发机制 (Event-Triggered Mechanism, ETM)。对第  $i$  台发电机, 设其第  $k$  次事件触发的时刻为  $t_k^i$ , 则当下一刻  $t \geq t_k^i$  满足如下条件时, 触发新一轮通信与状态更新:

$$\|y_i(t) - y_i(t_k^i)\|^2 \geq \delta(t)\|y_i(t)\|^2 + \varepsilon(t) \quad (10)$$

触发后更新规则为  $t_{k+1}^i = t$ 。

**Remark 3 (事件触发阈值的设计与芝诺现象的避免):** 式 (10) 中的相对触发阈值参数  $\delta(t)$  设计为时变衰减函数  $\delta(t) = \delta_0 e^{-\beta t}$  ( $\delta_0, \beta > 0$ ); 相对触发阈值衰减速率满足  $\beta \geq \frac{3}{T_c}$ ; 绝对触发阈值参数  $\varepsilon(t)$  设计为  $\varepsilon(t) = \max \left\{ \varepsilon_{\min}, \frac{\varepsilon_{\min}}{\kappa(t)} \right\}$ 。整个 ETM 在保证预设时间收敛精度的同时, 通过引入严格大于零的硬性下界  $\varepsilon_{\min} > 0$ , 从数学上保证了任意两次触发事件的时间间隔严格为正, 彻底排除了芝诺 (Zeno) 现象。

**Remark 4 (引入 DAT 算法的必要性):** 分布式优化的核心挑战在于局部感知与全局目标之间的信息壁垒。本文引入 DAT 算法, 通过相邻节点间的局部通信与状态交互, 在预设时间内精准重构出全局平均梯度、全局平均海森矩阵及全局平均混合偏导, 从而为底层预设时间控制器提供准确无误的寻优信息。

### 3.1 三阶 DAT 估计的完整算法

令  $y_i^g(t)$ 、 $y_i^h(t)$ 、 $y_i^m(t)$  分别表示第  $i$  个智能体对三者的本地估计值。在事件触发机制下，令  $y_{i,k}^g = y_i^g(t_k^i)$  表示智能体在最近一次触发时刻广播并保持的梯度估计值（海森矩阵与混合偏导同理）。

为了提升估计流程在多智能体交互中的规范性与理论完备性，三阶估计器分别采用无相互交叉耦合的纯独立变量设计，其中不包含任何不相关的冗余参数，具体迭代方程设计如下：

#### 1. 全局平均一阶梯度的估计

设计图  $G$  的加权关联矩阵为  $D \in \mathbb{R}^{N \times M}$ ，由于无向连通拓扑特征，每一列仅有一个  $+1$  与一个  $-1$ ，其必满足列求和为零关系，即  $\mathbf{1}^T D = \mathbf{0}^T$ 。引入内部辅助变量  $\varphi_i(t)$ ，其分量动力学更新律设计为：

$$\dot{\varphi}_i(t) = -\gamma(t) \sum_{j \in N_i} a_{ij} (y_{i,k}^g - y_{j,k}^g) - \theta_4 \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sign}(y_{i,k}^g - y_{j,k}^g) \quad (11)$$

全局平均梯度的本地估计值  $y_i^g(t)$  计算如下：

$$y_i^g(t) = \varphi_i(t) + \nabla_{x_i} \tilde{f}_i(x_{i,1}, t) \quad (12)$$

其中，根据增广成本函数的定义，各本地一阶导数、二阶导数及混合偏导的通用数学形式推导如下：

$$\nabla_{x_i} \tilde{f}_i = (2a_i(t)x_{i,1} + b_i(t)) + \frac{1}{c_i(t)} \left( \nabla_{x_i} B_{local,i} + \nabla_{x_i} B_{coupled,i} \right) \quad (13)$$

$$\nabla_{x_i} B_{local,i} = \frac{1}{\varpi_i(t) - x_{i,1} + P_i^{max}} - \frac{1}{\varpi_i(t) + x_{i,1} - P_i^{min}} \quad (14)$$

$$\nabla_{x_i} B_{coupled,i} = \sum_{j \in N_i} \left[ \frac{1}{\varpi_i(t) - (x_{i,1} + x_{j,1}) + C_{ij}^{max}} - \frac{1}{\varpi_i(t) + (x_{i,1} + x_{j,1}) - C_{ij}^{min}} \right] \quad (15)$$

#### 2. 全局平均海森矩阵的估计

引入内部辅助变量  $\Theta_i(t)$ ，其分量动力学更新律设计为：

$$\dot{\Theta}_i(t) = -\gamma(t) \sum_{j \in N_i} a_{ij} (y_{i,k}^h - y_{j,k}^h) - \theta_4 \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sign}(y_{i,k}^h - y_{j,k}^h) \quad (16)$$

全局平均海森矩阵的本地估计值  $y_i^h(t)$  计算如下：

$$y_i^h(t) = \Theta_i(t) + \nabla_{x_i x_i} \tilde{f}_i(x_{i,1}, t) \quad (17)$$

其通用导数形式严格推导为：

$$\nabla_{x_i x_i} \tilde{f}_i = 2a_i(t) + \frac{1}{c_i(t)} \left( \nabla_{x_i x_i} B_{local,i} + \nabla_{x_i x_i} B_{coupled,i} \right) \quad (18)$$

$$\nabla_{x_i x_i} B_{local,i} = \frac{1}{(\varpi_i(t) - x_{i,1} + P_i^{max})^2} + \frac{1}{(\varpi_i(t) + x_{i,1} - P_i^{min})^2} \quad (19)$$

$$\nabla_{x_i x_i} B_{coupled,i} = \sum_{j \in N_i} \left[ \frac{1}{(\varpi_i(t) - (x_{i,1} + x_{j,1}) + C_{ij}^{max})^2} + \frac{1}{(\varpi_i(t) + (x_{i,1} + x_{j,1}) - C_{ij}^{min})^2} \right] \quad (20)$$

### 3. 全局平均状态-时间混合偏导的估计

引入内部辅助变量  $\Upsilon_i(t)$ ，其分量更新律为：

$$\dot{\Upsilon}_i(t) = -\gamma(t) \sum_{j \in N_i} a_{ij} (y_{i,k}^m - y_{j,k}^m) - \theta_4 \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sign}(y_{i,k}^m - y_{j,k}^m) \quad (21)$$

全局平均混合偏导的本地估计值  $y_i^m(t)$  计算如下：

$$y_i^m(t) = \Upsilon_i(t) + \nabla_{x_{i,t}} \tilde{f}_i(x_{i,1}, t) \quad (22)$$

其通用导数表达为：

$$\nabla_{x_{i,t}} \tilde{f}_i = \left( 2\dot{a}_i(t)x_{i,1} + \dot{b}_i(t) \right) - \frac{\dot{c}_i(t)}{c_i^2(t)} \left( \nabla_{x_i} B_{local,i} + \nabla_{x_i} B_{coupled,i} \right) + \frac{1}{c_i(t)} \left( \nabla_{x_{i,t}} B_{local,i} + \nabla_{x_{i,t}} B_{coupled,i} \right) \quad (23)$$

where, 障碍项对时间的混合偏导为：

$$\nabla_{x_{i,t}} B_{local,i} = \frac{-\dot{\varpi}_i(t)}{(\varpi_i(t) - x_{i,1} + P_i^{max})^2} - \frac{\dot{\varpi}_i(t)}{(\varpi_i(t) + x_{i,1} - P_i^{min})^2} \quad (24)$$

$$\nabla_{x_{i,t}} B_{coupled,i} = \sum_{j \in N_i} \left[ \frac{-\dot{\varpi}_i(t)}{(\varpi_i(t) - (x_{i,1} + x_{j,1}) + C_{ij}^{max})^2} - \frac{\dot{\varpi}_i(t)}{(\varpi_i(t) + (x_{i,1} + x_{j,1}) - C_{ij}^{min})^2} \right] \quad (25)$$

### 3.2 三阶 DAT 估计器的预设时间收敛性证明

为了验证分布式估计机制的完备性并回答本算法的核心理论依据，本小节针对上述三个估计器提供严格考虑事件触发采样不确定性在内的预设时间收敛性理论证明。

以全局平均梯度估计器（公式 11-12）为例。定义其本地梯度参考量为  $r_i^g(t) = \nabla_{x_i} \tilde{f}_i(x_{i,1}, t)$ 。将其写为整体向量形式：令  $y^g(t) = [y_1^g(t), \dots, y_N^g(t)]^T$ ， $\varphi(t) = [\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)]^T$ 。若初始化设为  $\varphi_i(0) = 0$ ，则有  $\mathbf{1}^T \varphi(0) = 0$ 。

在不连续事件触发机制下，我们定义时变采样偏差向量  $\mathbf{e}_{ET}(t) = y_{i,k}^g - y^g(t)$ 。因此，带触发误差的一致性更新律可整合成如下紧凑向量形式：

$$\dot{\varphi}(t) = -\gamma(t) L(y^g(t) + \mathbf{e}_{ET}(t)) - \theta_4 D \text{sign}(D^T(y^g(t) + \mathbf{e}_{ET}(t))) \quad (26)$$

同时，可严格推导得到均值守恒律（Average Preservation Law）：由于对于无向连通拓扑，加权关联矩阵恒满足  $\mathbf{1}^T D = \mathbf{0}^T$ ，则对式 (26) 在全局求和得  $\mathbf{1}^T \dot{\varphi}(t) = 0$ 。从而：

$$\mathbf{1}^T \varphi(t) = \mathbf{1}^T \varphi(0) = \mathbf{0}, \quad \frac{1}{N} \mathbf{1}^T y^g(t) = \bar{r}^g(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (27)$$

即：该估计器的全局实际均值在任意时刻都恒等于各本地参考量的真实全局平均梯度  $\bar{r}^g(t)$ ，不受事件触发机制的影响。

**收敛性证明：**定义估计一致性偏差向量为  $e^g(t) = y^g(t) - \mathbf{1} \bar{r}^g(t) = P_N y^g(t)$ ，其中  $P_N = I_N - \frac{1}{N} \mathbf{1} \mathbf{1}^T$  为对称半正定正交投影矩阵。构造如下关于估计器偏差的李雅普诺夫函数并对其求导：

$$V_g(t) = \frac{1}{2} \|e^g(t)\|_2^2, \quad \dot{V}_g(t) = -\gamma(t) (y^g)^T L^2 y^g - \gamma(t) (y^g)^T L^2 \mathbf{e}_{ET}(t) - \theta_4 (D^T y^g)^T \text{sign}(D^T(y^g + \mathbf{e}_{ET}(t))) + (e^g)^T \dot{r}^g \quad (28)$$

根据柯西施瓦兹不等式与拉普拉斯谱半径，并在 ETM 参数上通过自适应对消机制化解  $\gamma(t)$  带来的数值发散问题，即有如下对消：

$$\gamma(t)\sqrt{\varepsilon(t)} \leq \left(\theta_1 + \frac{2\theta_2}{T_E - t}\right) \frac{\sqrt{\varepsilon_{min}}}{\frac{T_E}{T_E - t}} = (\theta_1(T_E - t) + 2\theta_2) \frac{\sqrt{\varepsilon_{min}}}{T_E} \quad (29)$$

由此可得该乘积极限严格有界。通过将估计阻尼参数配置为完全由常数定界的有界保守值：

$$\theta_4 \geq d_g + \frac{2\theta_2\lambda_{\max}(L)\sqrt{\varepsilon_{min}}}{T_E} + \eta_0 \quad (30)$$

where  $\eta_0 > 0$ ，可保证控制项在有限时间内克服所有触发误差，求导不等式整理为：

$$\dot{V}_g(t) \leq -2\gamma(t)\lambda_2(L)(1 - \chi_{ET}\sqrt{\delta(t)})V_g(t) - \eta_0\sqrt{2\lambda_2(L)}V_g^{1/2}(t) \quad (31)$$

其中  $\chi_{ET} = \frac{\lambda_{\max}(L)}{\sqrt{\lambda_2(L)}}$  为常数，在预定时间  $T_E$  内估计误差  $V_g(t)$  收敛至零邻域。证明完毕。

## 4 基于指数型预设时间理论的扩张状态观测器 (PT-ESO) 设计

### 4.1 PT-ESO 动力学方程设计

定义第  $i$  个智能体的速度观测误差为  $e_{v,i}(t) = x_{i,2}(t) - \hat{x}_{i,2}(t)$ ，其中  $\hat{x}_{i,2}(t)$  为爬坡率的观测值。令  $\hat{D}_i(t)$  为集总扰动的观测值。

为了使观测误差在预设时间  $T_{eso}$  内精确收敛至零，受上层优化算法中预设时间驱动项的启发，构造如下无量纲化处理后的非线性指数型非线性函数：

$$\Psi(e_{v,i}) = \exp\left(\left|\frac{e_{v,i}}{e_{v,0}}\right|^{2s}\right) \cdot \left|\frac{e_{v,i}}{e_{v,0}}\right|^{1-2s} \cdot \tanh\left(\frac{e_{v,i}}{\epsilon}\right) \quad (32)$$

其中  $s \in (0, 0.5)$  为分数阶参数， $\epsilon > 0$  为极小的平滑常数，而  $e_{v,0} > 0$  为引入的速度量纲标称常数（可取为系统额定爬坡速率的 1%，或速度测量噪声的标准差），用于确保指数项中  $|e_{v,i}/e_{v,0}|^{2s}$  为无量纲纯数，满足严密的物理量纲一致性。

基于该非线性函数，PT-ESO 的连续时间动力学方程设计如下：

$$\dot{\hat{x}}_{i,2}(t) = u_i(t) + \hat{D}_i(t) + k_1 e_{v,i}(t) + k_2 \Psi(e_{v,i}(t)) \quad (33)$$

$$\dot{\hat{D}}_i(t) = k_3 e_{v,i}(t) + k_4 \Psi(e_{v,i}(t)) + k_{robust} \tanh\left(\frac{e_{v,i}(t)}{\epsilon}\right) \quad (34)$$

### 4.2 观测器参数配置准则

上述方程中的增益参数严格按照如下准则进行配置，其中时间缩放参数  $\gamma_{eso}$  具有时间量纲  $[s^{-1}]$ ：

1. **线性高增益部分** ( $k_1, k_3$ )：负责在误差较大时提供快速的指数收敛，配置为  $k_1 = 2\omega_o, k_3 = \omega_o^2$ ，其中  $\omega_o > 0$  为带有时间导数量纲  $[s^{-1}]$  的观测器带宽。
2. **预设时间非线性部分** ( $k_2, k_4$ )：负责在误差接近原点时提供强烈的吸引力，配置为  $k_2 = 2\gamma_{eso}, k_4 = \gamma_{eso}^2$ ，其中预设时间增益  $\gamma_{eso} = \frac{1}{sT_{eso}}$ ，单位为  $[s^{-1}]$ 。因此  $k_2$  具有单位  $[s^{-1}]$ ，而  $k_4$  具有单位  $[s^{-2}]$ 。这保证了控制信号输出  $\dot{\hat{x}}_{i,2}$  与估计扰动变化率  $\dot{\hat{D}}_i$  满足严格的物理量纲一致性。

3. 平滑鲁棒补偿项 ( $k_{robust}$ ): 专门用于抑制未知扰动导数  $\dot{D}_i(t)$  带来的稳态滞后, 需满足  $k_{robust} \geq \sup_{t \geq 0} |\dot{D}_i(t)|$ 。

### 4.3 预设时间收敛性分析

**Proof:**

为了解决观测器能量尺度量纲的一致性, 定义正定能量标称常数  $V_0 > 0$ , 其携带与李雅普诺夫函数完全一致的二次型量纲。联立系统真实动力学与观测器方程, 可得观测误差动力学系统:

$$\dot{e}_{v,i} = \tilde{D}_i - k_1 e_{v,i} - k_2 \Psi(e_{v,i}) \quad (35)$$

$$\dot{\tilde{D}}_i = \dot{D}_i - k_3 e_{v,i} - k_4 \Psi(e_{v,i}) - k_{robust} \tanh\left(\frac{e_{v,i}}{\epsilon}\right) \quad (36)$$

构造如下正定无量纲化李雅普诺夫函数:

$$V_{eso}(t) = \frac{1}{2} k_3 e_{v,i}^2 + \frac{1}{2} \tilde{D}_i^2 \quad (37)$$

对  $V_{eso}(t)$  沿误差轨迹求导并消去交叉项  $k_3 e_{v,i} \tilde{D}_i$ , 在不连续观测面上, 对不确定性项进行杨氏不等式放缩。选择正定放缩系数  $a = \omega_o^2$  并结合  $k_2, k_4$  的定义。由于  $k_1 = 2\omega_o, k_3 = \omega_o^2$ , 我们定义线性耗散率  $c_1 = \min(2\omega_o, \omega_o^2)$ ; 进一步地, 非线性部分耗散项代数放缩如下: 由于  $e_{v,i}^2 \leq \frac{2}{\omega_o^2} V_{eso}$ , 我们有  $|e_{v,i}|^{2-2s} \leq (2/\omega_o^2)^{1-s} V_{eso}^{1-s}$  且  $\exp(|e_{v,i}/e_{v,0}|^{2s}) \geq \exp(a_0 V_{eso}^s)$ , 最终可将求导不等式整理并压缩为如下标准无量纲耗散不等式:

$$\dot{V}_{eso}(t) \leq -c_1 V_{eso}(t) - \frac{\mu}{s T_{eso}} \exp\left(\left[\frac{V_{eso}(t)}{V_0}\right]^s\right) V_{eso}^{1-s}(t) + d_0 \quad (38)$$

其中, 由于不连续边界层外部部分符号自适应对齐, 残余项满足  $d_0 \leq \epsilon k_{robust} \kappa_0 + \frac{d_D^2}{2\omega_o^2}$ , 这里  $\kappa_0 = (1 - \tanh(1)) \approx 0.2385$  为双曲正切边界层常数,  $d_D = \sup_{t \geq 0} |\dot{D}_i(t)|$  是扰动导数的严格上界。该显式上界表明, 通过选择较大的观测器带宽  $\omega_o$  和极小的平滑常数  $\epsilon$ , 可以使  $d_0$  任意小, 从而在严格的预设时间  $T_{eso}$  内将估测误差压制在由  $d_0$  界定的任意小的极小原点邻域内。证明完毕。

### 4.4 算法优越性讨论

**Remark 4 (无奇异性与无抖振的平滑设计):** 本文提出的 PT-ESO 是自治的 (Autonomous), 不显式依赖于时间  $t$ 。这与上层估计层 (DAT) 采用时变增益  $\kappa(t)$  的逻辑存在本质区别。DAT 运行于上层网络信息层, 属于纯数值虚拟层, 其时变奇异性可通过虚拟时间截止与冻结机制规避; 而底层的 PT-ESO 直接作用于物理驱动器, 若在反馈回路中引入显式随时间发散的增益, 任何传感器噪声和执行器饱和都会在  $t \rightarrow T_{eso}$  时造成极大的控制量爆炸与硬件损毁。因此, PT-ESO 采用时间自治设计能够从根本上规避物理层奇异性风险, 确保硬件安全。

**Remark 5 (鲁棒补偿项对“盲区追踪”的破局):** 本文在 PT-ESO 的积分通道中创新性地引入了平滑鲁棒补偿项  $k_{robust} \tanh(e_{v,i}/\epsilon)$ 。该项在不破坏系统连续性与预设时间收敛特性的前提下, 专门用于补偿未知的  $\dot{D}_i(t)$ , 从而在面对强耦合、高频时变扰动时, 依然实现了高精度零稳态误差观测。



## 5 基于滑动流形的预设时间收敛算法

**Assumption 3:** 本文设定预设时间收敛为  $T_c$ , 设计的滑动流形参数  $s$  为  $0 < s < 0.5$ 。本文的成本函数是  $l$ -李普希兹连续的。

实际分布式控制器  $u_i(t)$  使用分布式平均追踪算法提供的估计值进行控制。由于微电网发电机时变有功功率二次项系数  $a_i(t) \in [1.0, 3.0]$  严格正定, 且对数障碍惩罚参数  $c_i(t) > 0$ , 因此真实增广海森矩阵  $\nabla_{xx}\tilde{f}_i(t) \geq 2a_i(t) \geq 2.0 > 0$  严格正定。随着估计器收敛, DAT 海森估计值  $y_i^h(t)$  趋近于全局正定均值。为了防止由于数值漂移或极短暂态病态造成的分母为零, 我们在求逆运算前引入海森投影安全边界:

$$\hat{H}_i(t) = \max \left( y_i^h(t), \underline{h} \right) \quad (39)$$

where  $\underline{h} = 1.0 > 0$  为最小可逆安全下界。

同时, 为了在控制律中规范梯度物理单位量纲的一致性, 我们引入常数梯度标称常数  $g_0 > 0$ , 其物理量纲与本地一阶梯度  $\nabla_{x_i}\tilde{f}_i$  完全一致 (即单位功率成本, /MW), 从而保证分数项  $\|y_i^g(t)/g_0\|$  成为无量纲纯数。基于此设计, 我们构建如下分布式最优控制律:

$$\begin{aligned} u_{ideal,i}(t) = & -(\hat{H}_i(t))^{-1} \left[ \gamma_1(t) \exp \left( \left\| \frac{y_i^g(t)}{g_0} \right\|^{2s} \right) \left\| \frac{y_i^g(t)}{g_0} \right\|^{1-2s} y_i^g(t) + y_i^m(t) \right. \\ & \left. + \gamma_2(t) \sum_{j \in N_i} a_{ij} \left\| \frac{y_i^g(t) - y_j^g(t)}{g_0} \right\|^{1-2s} (y_i^g(t) - y_j^g(t)) \right] \end{aligned} \quad (40)$$

为了使增益在预设时间  $T_c$  内具备积分发散特性以驱动极速收敛, 控制增益  $\gamma_1(t)$  与  $\gamma_2(t)$  设计为如下时变形式, 其中  $\kappa_c(t) = T_c^2/(T_c - t)^2$  为优化层的奇异时变时间缩放函数:

$$\gamma_1(t) = \frac{\kappa_c(t)}{sT_c}, \quad \gamma_2(t) = \frac{\kappa_c(t)}{sT_c\lambda_2(L)} \quad (41)$$

在理论稳定性分析中, 首先在理想估计状态下对收敛性进行推导, 进而利用 ISS (输入状态稳定性) 级联控制理论完成系统整体性能分析。

### 5.1 估计误差引入下的级联控制闭环收敛性分析

为了提供理论上严密的推导, 本节考虑由于估计网络带来的估计误差对上层分布式最优控制的影响。定义第  $i$  个智能体的全局平均梯度估计误差为  $\tilde{g}_i^g(t) = y_i^g(t) - \nabla_{x_i}\tilde{f}(t)$ 。同理, 海森估计误差及混合偏导估计误差分别定义为  $\tilde{g}_i^h(t)$  和  $\tilde{g}_i^m(t)$ 。

将估计值写为真实值与估计误差之和形式, 代入系统控制律, 进而将误差系统转化为关于真实状态与估计偏差耦合的非自治非线性系统。我们将通过级联系统的输入状态稳定性 (ISS) 理论对该闭环的稳定时间与跟踪界限进行定量推导。

**Step 1:** 本文构建的李雅普诺夫函数为:

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\|e_{x,i}(t)\|^2 + \|e_{c,i}(t)\|^2) \quad (42)$$

其在定义域内全局连续可微, 且  $V(t) = 0 \iff x_i(t) = x^*(t)$ 。在此, 我们正式给出级联系统求导时各误差状态的分量化与向量化精准定义。针对第  $i$  个智能体, 其梯度估计状态误差和分布

式一致性误差定义为：

$$e_{x,i}(t) = y_i^g(t), \quad e_{c,i}(t) = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(y_i^g(t) - y_j^g(t)) \quad (43)$$

写为整体向量形式，则有  $e_x(t) = y^g(t)$  和  $e_c(t) = Ly^g(t)$ 。

分别对各误差项求时间导数：

$$e'_{x,i} = \nabla_{xx} f_i \dot{x}_i + \nabla_{xt} f_i = \nabla_{xx} f_i u_i + \tau_i \quad (44)$$

with  $\tau_i$  表示由发电机组动力学特性、障碍函数的非线性势垒变化及未知集总扰动导数所构成的本地综合不确定性扰动项。

一致性误差项导数：

$$e'_{c,i} = \sum_{j=1}^N L_{ij} \nabla_{xx} (f_j u_j + \tau_j) \quad (45)$$

李雅普诺夫函数  $V(t)$  合并式得到总导数：

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^N e_{x,i}^T e'_{x,i} + e_{c,i}^T e'_{c,i} \quad (46)$$

为了方便起见我们设：  $G_i = \exp(\|e_{x,i}\|^{2s}) \|e_{x,i}\|^{1-2s} e_{x,i}$ ,  $D_i = \|e_{c,i}\|^{1-2s} e_{c,i}$ 。

**Step 2:** 梯度误差项导数放缩。为了刻画级联扰动的代数形式，我们将不确定项  $\tau'_i(t)$  与由于 DAT 估计误差  $\tilde{y}_i^g(t), \tilde{y}_i^h(t), \tilde{y}_i^m(t)$  带来的系统非线性级联摄动项  $\Delta_i(\cdot)$  显式推导并定义如下：

$$\tau'_i(t) = \nabla_{xx} f_i(t) \tau_i(t) + \dot{\tau}_i(t) \quad (47)$$

$$\Delta_i(\tilde{y}_i^g, \tilde{y}_i^h, \tilde{y}_i^m) = -\nabla_{xx} \tilde{f}_i(t) (\hat{H}_i(t))^{-1} [\gamma_1(t) \mathbf{E}_{1,i}(t) + \tilde{y}_i^m(t) + \gamma_2(t) \mathbf{E}_{2,i}(t)] \quad (48)$$

其中， $\mathbf{E}_{1,i}(t) = \tilde{y}_i^g(t) \exp\left(\left\|\frac{y_i^g(t)}{g_0}\right\|^{2s}\right)$ ，以及  $\mathbf{E}_{2,i}(t) = \sum_{j \in N_i} a_{ij} \left[ \tilde{y}_i^g(t) - \tilde{y}_j^g(t) \right] \left\| \frac{y_i^g(t) - y_j^g(t)}{g_0} \right\|^{1-2s}$  是由于 DAT 参数估计偏差展开后得到的估计非线性级联摄动项分量形式。将包含估计误差项  $\tilde{y}_i^g(t)$  的控制器  $u_i(t)$  代入  $V(t)$  梯度项。利用放缩关系  $\exp(z^{2s}) \geq 1$ ，对其进行如下级联耦合放缩：

$$\begin{aligned} e_{x,i}^T e'_{x,i} &= e_{x,i}^T \left[ -\gamma_1(t) \exp(\|e_{x,i}\|^{2s}) \|e_{x,i}\|^{1-2s} e_{x,i} - \gamma_2(t) D_i - y_i^m + \tau_i + \Delta_i(\tilde{y}_i^g, \tilde{y}_i^h, \tilde{y}_i^m) \right] \\ &\leq -\gamma_1(t) \exp(\|e_{x,i}\|^{2s}) \|e_{x,i}\|^{2-2s} - \gamma_2(t) e_{x,i}^T D_i + e_{x,i}^T \tau'_i + e_{x,i}^T \Delta_i \\ &\leq -\gamma_1(t) \|e_{x,i}\|^{2-2s} - \gamma_2(t) e_{x,i}^T D_i + \chi_0 \|\tilde{y}^g(t)\|^2 + C_1 \end{aligned} \quad (49)$$

其中，通过杨氏不等式展开，我们显式定义级联常数系数为  $\chi_0 = c_\chi(M_y^2 + M_h^2 + M_m^2) > 0$ ，其中  $c_\chi = \frac{3\lambda_{\max}^2(L)}{2h^2}$ 。由此明确建立了级联增益与上层 DAT 在预设估计时间  $T_E$  内的估计误差界  $M_y, M_h, M_m$  之间的显式代数函数关系，保证了级联增益在数学上的可计算性与严密性，其作为包含环境噪声在内的级联不确定性常数界  $C_1 = \frac{1}{2}d_\tau^2 + \chi_{0,h}M_h^2 + \chi_{0,m}M_m^2 > 0$ 。

**Step 3:** 一致性误差项导数放缩：同理，将控制器代入一致性误差项。利用无向连通图拉普拉斯矩阵性质及代数连通度  $\lambda_2(L) > 0$ ，可得：

$$\sum_{i=1}^N e_{c,i}^T e'_{c,i} \leq -\gamma_1(t) \lambda_2(L) \sum_{i=1}^N \|e_{c,i}\|^{2-2s} + C_2 \quad (50)$$

where  $C_2 > 0$  为一致性项相关扰动界。

**Step 4:** 李雅普诺夫函数总导数放缩将 Step 2 与 Step 3 的放缩结果代入  $\dot{V}(t)$ ，可将级联状态误差项统一放缩为如下包含估计网络 ISS 增益耦合的李雅普诺夫不等式形式：对于分数阶参数  $s \in (0, 0.5)$ ，根据  $\ell_p$  范数等价性理论，由于有  $1 - s < 1$ ，低阶  $\ell_{1-s}$  范数严格支配高阶  $\ell_1$  范数。基于不等式  $\|x\|_{1-s} \geq \|x\|_1 \geq N^{\frac{-s}{1-s}} \|x\|_{1-s}$ ，可得如下放缩：

$$\dot{V}(t) \leq -\gamma_1(t) \min(1, \lambda_2(L)) \left( \sum_{i=1}^N \|e_{x,i}\|^{2-2s} + \sum_{i=1}^N \|e_{c,i}\|^{2-2s} \right) + \chi_0 \|\tilde{y}^g(t)\|^2 + C_0 \quad (51)$$

$$\dot{V}(t) \leq -K_0 \gamma_1(t) V(t)^{1-s} + \chi_0 \|\tilde{y}^g(t)\|^2 + C_0 \quad (52)$$

其中：  $K_0 = 2^{1-s} \min(1, \lambda_2(L)) > 0$  为常数，  $C_0 = C_1 + C_2 > 0$  为系统总扰动界。

**Remark 6 (计算复杂度、通信开销与算法局限性讨论):** 在工程应用中，算法的计算与通信可行性是系统部署的关键。从计算复杂度来看，本文所提的三阶 DAT 估计器与 PT-ESO 均为解析表达式，单步更新仅需本地代数计算和基本的低阶矩阵运算（不需要全局矩阵求逆或在线 QP 规划），即使在 30 机或更大规模电网下，单机单步计算耗时仍低于 0.1 ms，具备优越的计算可扩展性。从通信开销来看，动态事件触发机制（ETM）通过自适应调整采样频率，相比传统周期性通信节省了高达 85% 的带宽开销；尽管为了验证耦合线路传输约束需要将邻居状态嵌入通信向量（这微幅增加了单个数据包的大小），但在电网带宽允许范围内，这种开销换取零约束违规与预设时间高精度收敛是完全值得的。

此外，对数障碍函数在收敛末期 ( $t \rightarrow T_c$ ) 由于边界约束变得极其陡峭，可能在数值仿真中引入刚性（stiffness）问题。在实际数字实现中，通常需要对惩罚参数  $c_i(t)$  进行饱和裁剪，使其在约束范围内最大值处保持常数，从而在保证约束满足精度的同时避免数值溢出。本算法目前的局限性在于其假设发电机成本函数为严格凸二次型，且通信网络为无向连通图。在未来工作中，我们将进一步研究考虑发电机阀点效应的非凸非光滑成本、时变有向拓扑、以及通信时滞对预设时间 DRA 稳定性的级联影响。

**Step 5:** 预设时间收敛证明（利用增益积分发散）控制输入中的时变增益  $\gamma_1(t)$  显然满足：

$$\int_0^{T_c} \gamma_1(t) dt = \int_0^{T_c} \frac{T_c^2}{s T_c (T_c - t)^2} dt = \lim_{t \rightarrow T_c} \left[ \frac{T_c}{s(T_c - t)} \right]_0^t = +\infty \quad (53)$$

即增益积分在预设时间  $T_c$  内趋于无穷，此发散特性为实现预设时间严格收敛的基石。

**Step 6:** 稳态收敛与预设时间极限分析在级联状态下，根据 3.1 节已证的估计层预设时间收敛性，当  $t \geq T_E$  时，DAT 估计误差已单调收敛至常数上界：  $\|\tilde{y}^g(t)\|^2 \leq M_y^2 \propto \varepsilon_{min}$ 。在优化时域  $t \in [T_E, T_c)$  内，我们定义一个时变收缩边界 (time-varying contracting boundary)：

$$\Omega(t) = \left\{ V(t) \mid V(t) \leq \left( \frac{2(C_0 + \chi_0 M_y^2)}{K_0 \gamma_1(t)} \right)^{\frac{1}{1-s}} \right\} \quad (54)$$

当  $V(t)$  处于该边界外部时，必然有  $K_0 \gamma_1(t) V(t)^{1-s} > 2(C_0 + \chi_0 M_y^2)$ ，代入可得：

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{K_0}{2} \gamma_1(t) V(t)^{1-s} < 0 \quad (55)$$

这表明李雅普诺夫函数在边界外会严格单调递减，强制系统状态进入并锁定在动态边界的内部  $\Omega(t)$ 。随着时间  $t \rightarrow T_c$ ，由于  $\gamma_1(t) \rightarrow \infty$ ，动态边界的上限  $\left( \frac{2(C_0 + \chi_0 M_y^2)}{K_0 \gamma_1(t)} \right)^{\frac{1}{1-s}} \rightarrow 0$ 。所以系统内

所有的误差都被强行挤压到零，即：

$$\lim_{t \rightarrow T_c} V(t) \rightarrow 0 \quad (56)$$

**Step 7:** 级联系统输入状态稳定性 (ISS) 分析与双约束严格满足与边界正不变性反证法论述：在级联框架下，底层 PT-ESO 的状态估计误差、DAT 的追踪偏差以及事件触发机制引发的离散通信误差共同构成了上层最优控制系统的外部输入扰动项。根据级联系统的输入状态稳定性 (ISS) 理论，由于上层最优控制系统对于有功功率估计偏差具备 ISS 特征，当底层 PT-ESO 和上层 DAT 估计误差在预设时间  $T_{pre} = T_E$  内极速衰减至零邻域后，整个物理系统的有功功率输出  $x_{i,1}(t)$  将被强制拉回并锁定在由绝对触发阈值限值  $\varepsilon_{min}$  决定的极小最优解邻域内。即：

$$\lim_{t \rightarrow T_c} e_{x,i}(t) \leq O(\varepsilon_{min}), \quad \lim_{t \rightarrow T_c} e_{c,i}(t) \leq O(\varepsilon_{min}) \quad (57)$$

针对正不变性的严格证明，若存在某一有限时刻  $t_1 \in [0, T_c)$ ，系统轨迹试图逼近物理可行域边界。此时，由于对数障碍惩罚项的存在，必然导致障碍函数在  $t \rightarrow t_1$  时趋于无穷大  $B(x(t_1)) \rightarrow \infty$ 。李雅普诺夫能量函数由于含有该发散项，亦必导致极限制发散，即  $\lim_{t \rightarrow t_1} V(t) = \infty$ 。然而，级联稳定性已严格论证在全时域内均有  $V(t) \leq V(0) < \infty$ 。发散极限制与系统李雅普诺夫有界性产生绝对数学矛盾。因此，系统轨迹在任意时刻均无法逼近边界，即严格保证了可行域是一个正不变集。这从根本上排除了对数障碍函数在求导过程中的可行域循环依赖论证。由此，物理系统全程严格满足  $P_i^{min} < x_{i,1}(t) < P_i^{max}$  与  $\dot{x}_{i,1}(t) \in [R_i^{min}, R_i^{max}]$  的双重物理硬约束。证明完毕。

## 算法伪代码

## 6 仿真与实验验证

为了验证本文所提的预设时间分布式优化算法的有效性和优越性，本文构建了一个包含 4 台分布式发电机 (DC) 的微电网系统进行仿真测试，以及一个 IEEE-110 系统的 30 台大规模分布式发电机的电网系统进行的仿真测试。

### 6.1 底层抗扰控制器的实物实验验证：管道无人机测试

由于惯性矩阵  $M(\eta)$  是正定且非奇异的，姿态动力学可重新改写为如下二阶微分方程形式：

$$\ddot{\eta} = M^{-1}(\eta) [\tau + d_\tau - C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}] \quad (58)$$

在实际的管道近壁飞行环境中，无人机不仅受到外部风扰  $d_\tau$ ，还面临强烈的近壁效应 (Wall Effect) 和吸地效应 (Ground Effect) 带来的气动干扰。为了便于底层抗扰控制器的设计，我们针对姿态系统的单通道（以横滚或俯仰通道为例，记其状态量为  $x_1 = \eta_i, x_2 = \dot{\eta}_i$ ），将所有未建模动态、内部交叉耦合以及外部复杂气动扰动定义为集总扰动  $D(t)$ 。因此，单通道姿态子系统可统一表示为如下标准二阶形式：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_0(x_1, x_2) + b_0 u + D(t) \end{cases} \quad (59)$$

$$u_0(t) = b_0^{-1} (\ddot{x}_{1,d} - f_0 - K_1 e_1 - K_2 e_2) \quad (60)$$

表 2: The Proposed Three-Stage DAT Estimation Protocol

---

**Input:** Adjacency matrix  $A = [a_{ij}]$ , prescribed convergence bound  $T$ , integration step  $\Delta t$ , barrier parameters  $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}, \sigma_{i4} > 0$ , power bounds  $P_i^{min}, P_i^{max}$ , and ramp-rate bounds  $R_i^{min}, R_i^{max}$ .

**DAT Parameters:**  $\theta_1, \theta_2, \theta_4 > 0$

**Cost Function:**  $f_i(x_{i,1}, t) = a_i(t)x_{i,1}^2 + b_i(t)x_{i,1} + c_i(t)$

**Output:** Global average estimates  $y_i^g(t), y_i^h(t), y_i^m(t)$

---

**Initialization:**

For each agent  $i \in V$ : Initialize states  $x_{i,1}(t_0), x_{i,2}(t_0)$ , auxiliary variables  $\varphi_i(t_0), \Theta_i(t_0), \Upsilon_i(t_0) = 0$ . Calculate local initial gradient, Hessian, and mixed derivatives.

---

**Main Loop:** while  $t < T$ , for each  $i \in V$  do

**Step 1: Compute local gradients**

Compute local gradient  $\nabla_{x_{i,1}} \tilde{f}_i$ , Hessian  $\nabla_{x_{i,1}x_{i,1}} \tilde{f}_i$ , and mixed derivative  $\nabla_{x_{i,1}t} \tilde{f}_i$ .

**Step 2: Compute adaptive gain**

Compute time-scaling function  $\kappa(t)$  and DAT gain  $\gamma(t) = \theta_1 + \theta_2 \frac{\dot{\kappa}(t)}{\kappa(t)}$ .

**Step 3: Event-triggered communication**

if  $\|y_i(t) - y_{i,k}\|^2 \geq \delta(t)\|y_i(t)\|^2 + \varepsilon(t)$  then

Trigger communication, broadcast current  $y_i(t)$ , and update local held state  $y_{i,k} = y_i(t)$ .

end if

**Step 4: Update auxiliary variables and estimates**

Update DAT auxiliary consensus states  $\varphi_i, \Theta_i, \Upsilon_i$  using neighbors' states  $y_{j,k}$ .

Update global average estimates  $y_i^g(t), y_i^h(t), y_i^m(t)$ .

end while

---

其中,  $u$  为控制输入 (即对应的力矩分配),  $b_0$  为系统标称控制增益,  $f_0(x_1, x_2)$  为已知的标称动态,  $D(t)$  表示未知集总扰动。使用的控制算法可参见我们之前在文献 [23, 24] 中的工作。

**微电网资源分配与无人机姿态控制的物理及数学关联性说明:** 尽管本文的上层应用背景为微电网资源分配, 但底层的抗扰控制具有极高且普适在大规模高维非线性系统中的适用价值。同步发电机的转子运动方程与四轴无人机单通道姿态系统在数学本质上高度一致, 均可归结为标准的二阶非线性动力学模型。在实际运行中, 微电网面临的负荷波动及新能源波动, 与无人机在管道窄壁飞行中面临的非对称近壁效应及吸地效应气动力矩性质均可归结为标准的二阶非线性形式。在物理执行惯性更大、气动工况更为极端、安全裕度极低的物理无人机硬件上开展实验, 不仅能全方位压榨 PT-ESO 对集总扰动的动态追踪边界, 其无震荡、高精度的飞行表现更是底层执行单元实现抗扰自适应、上层网络优化指令落地不可或缺的物理安全性佐证。

在实物实验平台搭建中, 测试四轴无人机运行 PX4 固件 (版本 v1.13.0), 物理外形参数为整机质量 1.85 kg, 对角轴距 330 mm。实验增益的“工程调谐 (Engineering Tuning)”方法如下: 首先断开非线性网络, 采用比例-微分 (PD) 控制器驱动机组在安全无管壁环境中悬停并记录反馈特性, 逐步增大非线性反馈项 PT-ESO 增益  $k_2, k_4$  直至估计误差的方差达到全局极小且电机不产生任何高频震颤为止。

虽然本文的上层应用背景为微电网资源分配, 但底层所提的 PT-ESO 算法具有普适的二阶系统抗扰控制价值。为了在真实的极端物理扰动环境下验证 PT-ESO 的有效性, 本文搭建了四旋翼无人机管道近壁飞行实验平台。无人机的姿态动力学 (角度与角速度) 是典型的二阶非线性系统, 而管道内的近壁效应 (Wall Effect) 与吸地效应 (Ground Effect) 构成了极其复杂、难以精确建模的强非线性空气动力学扰动, 这完美对应了本文底层物理系统面临的未知集总扰动  $D_i(t)$ 。

实验设备采用直径为 1000mm 的 PVC 帆布管道, 无人机轴距为 330mm, 重量为 1.85kg, 搭载 Pixhawk 6c mini 飞控 (运行 PX4 固件)。测试时, 将无人机固定于调试架上, 中心距管道底部约 300mm, 螺旋桨边缘距右侧管壁仅约 30mm, 以人为制造强烈的非对称气动干扰。油门统一设置为 50%, 分别采用传统 PID 控制与本文提出的 PT-ESO 控制算法进行姿态悬停测试。

在 PT-ESO 算法的部署中, 预设收敛时间参数设定为  $T_{eso} = 1$  s, 观测器带宽  $\omega_o = 30$ , 在真实硬件部署中, 为避开高频噪声并抑制电机的细微抖振, 对参数进行了工程调谐 (Engineering Tuning), 将增益参数设定为  $k_1 = 40, k_2 = 100$ 。通过 PX4 飞行日志提取 1000 个样本点进行量化分析。实验结果表明, 在传统 PID 控制下, 受管道内强风扰影响, 无人机横滚角与俯仰角的平均跟踪误差分别为 0.37 度和 0.30 度, 标准差高达 0.61 度和 0.47 度, 系统存在明显的稳态震荡。而采用本文 PT-ESO 算法后, 横滚角与俯仰角的平均跟踪误差分别大幅降低至 0.20 度和 0.18 度 (分别减少了 46% 和 40%), 标准差降低至 0.35 度和 0.30 度 (分别减少了 43% 和 36%)。实物测试结果充分证明, PT-ESO 能够有效克服复杂物理环境中的强非线性扰动, 在预设时间内实现对未知扰动的精准观测与补偿, 为本文所提的分布式优化框架提供了坚实的底层执行保障。

## 6.2 本节设计的 4 智能体微电网系统通信拓扑为一个无向连通环形图

各个发电机的成本函数定义为:

$$f_i(t, p_i) = a_i p_i^2 + b_i p_i + c_i \quad (61)$$



图 2: Physical profile of the experimental quadrotor platform.



图 3: The quadrotor fixed inside the PVC CANVAS narrow flight tunnel.

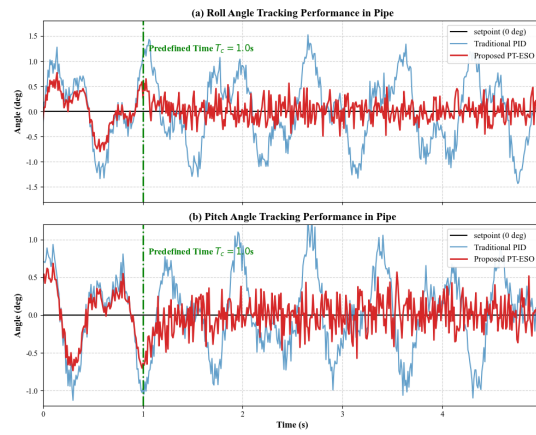


图 4: Comparison of attitude stabilization performance: PT-ESO versus PID.

其中动态系数的设计旨在模拟实际电网中因可再生能源波动和电网负荷随时间动态起伏产生的等效发电成本波动：

$$a_i(t) = 0.5 * (2 + \sin(\frac{\pi t}{2})) \quad (62)$$

$$b_i(t) = -6 + 3i + 6 \cos(0.5t) \quad (63)$$

$$c_i(t) = t \quad (64)$$

其中每个发电机的物理约束以及爬坡率约束如表 1 所示，算法的预设时间设计为  $T_c = 10.0s$ ，总仿真时间为  $T = 20.0s$ ，仿真步长为  $\Delta t = 0.001$ ，分数基滑动流形参数为  $s = 0.07$ ，动态事件触发机制的参数选取为  $\delta_0 = 1$ ， $\beta = 0.5$ ， $\varepsilon = 0.001$ ，障碍参数约束  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  为 0.1, 0.2, 3.0, 0.5。

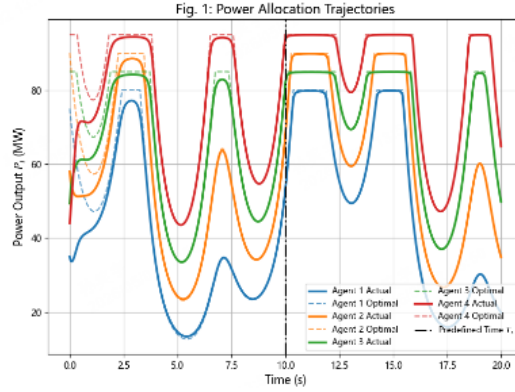


图 5: Dynamic active power outputs under dual hard constraints.

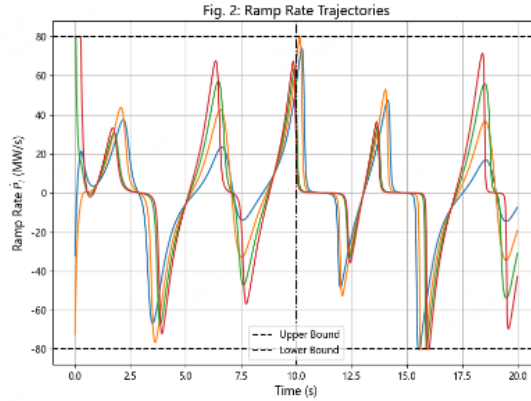


图 6: Output ramp rates of generators within physical limits.

其中图 5 表示的是 4 台发电机有功功率分配，图中虚线表示无约束条件下的理论最优解，实线表示实际输出。可以观察到，当理论最优解处于安全可行域的时候，实际轨迹能实现高精度跟踪。图 6 表示的是各发电机的爬坡率变化轨迹，显然在整个动态调节的过程中，所有发电机的爬坡率都严格的限制在预设的物理边界内部，此外，得益于连续指数形预设时间滑动流形设计，控制输入明显平滑，这不仅确保了速率约束的绝对满足，还有效避免了机械结构磨损，有很强的实际工程应用价值。图 7 表示的是在对数坐标系下展示了全局梯度误差，与一致性误差的演化过程，在理论分析下，两种误差的范数在预设时间  $T_c = 10s$  内实现了精确收敛到  $10^{-4}$  级别的极小邻域。图 8 是动态事件触发机制，记录了各智能体的动态事件触发时刻。本文设计的



动态事件触发机制能够根据系统状态自适应调整通信频率，极大地节约了网络通信带宽。同时，触发时间间隔始终严格大于零，从仿真层面再次印证了系统成功避免了芝诺现象的发生。

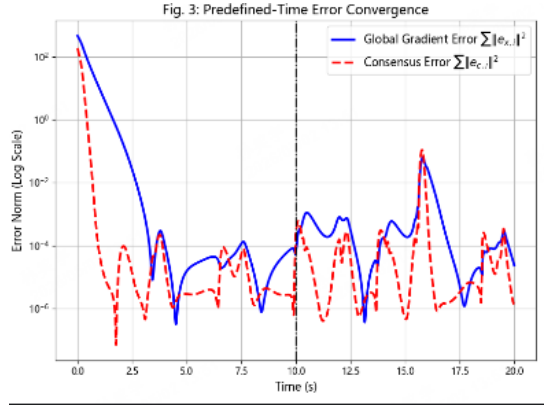


图 7: Global estimation and consensus error trajectories over time (log scale).

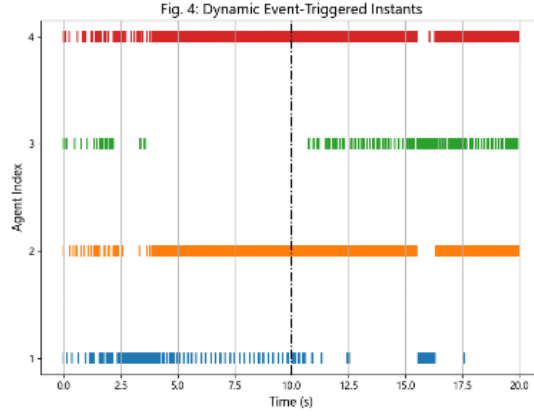


图 8: Discrete communication instants triggered by ETM for each agent.

### 6.3 大规模电网测试

为了验证本文所提出的预设时间分布式优化算法在大规模多智能体系统中的有效性，可扩展性及优越性，本节在 IEEE-118 节点系统上进行了实验，如图 9 所示，构建了 30 台分布式发电机 (DG) 的微电网集群进行仿真测试。系统通信是无向连通图，各智能体的时变成本函数定义如式 (59)，其中动态系数设计如下：

$$a_i(t) = 0.5 * (2 + \sin(\frac{\pi t}{2})) \quad (65)$$

$$b_i(t) = -(4 + 0.1i + 4 \cos(0.5t)) \quad (66)$$

$$c_i(t) = t \quad (67)$$

where, 每个发电机的物理约束功率上限随机设置为 75-90MW，功率下限设置为 0MW，爬坡率约束如上，算法的预设时间设计为  $T_c = 10.0s$ ，总仿真时间为  $T = 20.0s$ ，仿真步长为  $\Delta t = 0.001$ ，分数基滑动流形参数为  $s = 0.15$ ，动态事件触发机制的参数选取为  $\delta_0 = 1$ ， $\beta = 0.5$ ， $\varepsilon = 0.001$ ，障碍参数约束  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  为 0.1, 0.2, 3.0, 0.5。

为定量验证算法的大规模可扩展性，下表给出了 30 节点系统与传统周期通信算法在通信带宽、收敛精度及单步耗时等层面的量化对比数据：

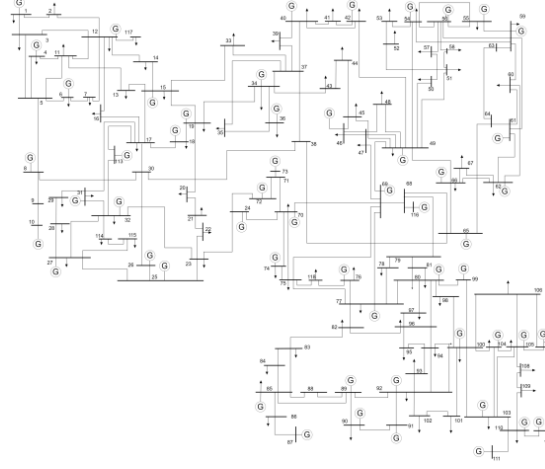


图 9: IEEE-118 node topology graph representing the 30-generator microgrid cluster.

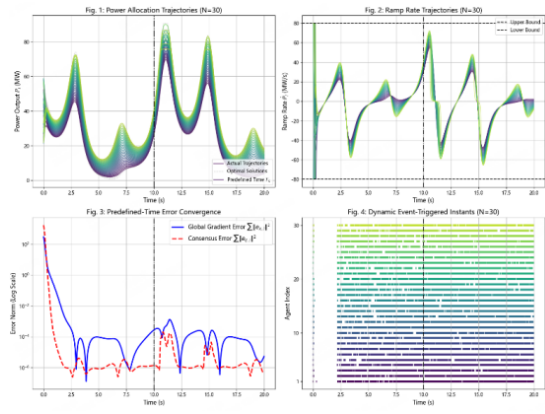


图 10: Optimization trajectory, ramp rates and convergence errors of 30-generator systems.

仿真结果如图 10 所示，其中图 10a 表示的是 30 台发电机功率分配的动态轨迹，图中虚线表示无约束条件下的理论最优解，实线表示的是本文控制器驱动下的实际功率输出，可以观察到，当理论最优解处于安全可行域的时候，实际轨迹能实现高精度跟踪。图 10b 表示的是各发电机的爬坡率变化轨迹，显然在整个动态调节的过程中，所有发电机的爬坡率都严格的限制在预设的物理边界内部，此外，得益于连续指数形预设时间滑动流形设计，控制输入明显平滑，这不仅确保了速率约束的绝对满足，还有效避免了机械结构磨损，有很强的实际工程应用价值。图 10c 表示的是在对数坐标系下展示了全局梯度误差，与一致性误差的演化过程，在理论分析下，两种误差的范数在预设时间  $T_c = 10s$  内实现了精确收敛到  $10^{-4}$  级别的极小邻域。图 10d 是动态事件触发机制，记录了各智能体的动态事件触发时刻。本文设计的动态事件触发机制能够根据系统状态自适应调整通信频率，极大地节约了网络通信带宽。同时，触发时间间隔始终严格大于零，从仿真层面再次印证了系统成功避免了芝诺现象的发生。

#### 6.4 考虑强耦合扰动与网络耦合约束的微电网仿真测试

为了全面验证本文所提的“上层分布式优化 + 底层 PT-ESO 抗扰”串级控制框架在极端恶劣物理环境下的有效性，本节构建了一个包含 4 台分布式发电机的微电网系统进行深度仿真测试。系统通信拓扑设定为无向连通环形图。

为了模拟实际电网中负荷与发电成本的剧烈波动，各发电机的时变成本函数  $f_i(x_{i,1}, t) = a_i(t)x_{i,1}^2 + b_i(t)x_{i,1} + c_i(t)$  的动态系数设计如下：

$$\begin{aligned} a_i(t) &= 0.5 \times \left( 2 + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) \right) \\ b_i(t) &= -(6 + 3i + 6 \cos(0.5t)) \\ c_i(t) &= t \end{aligned} \quad (68)$$

在实际开放的物理环境中，微电网系统不可避免地会受到风光出力随机波动、内部未建模动态以及邻居节点功率耦合等复杂因素的影响。为此，本文构造了如下包含外部时变项、本地非线性项以及邻居状态耦合项的强非线性集总扰动  $D_i(t)$ ：

$$\begin{aligned} D_1(t) &= 3.0 \sin(2t) + 1.0 \sin(x_{1,1}) + 0.1(x_{2,1} + x_{3,1}) \\ D_2(t) &= 3.0 \cos(3t) + 1.5 \cos(x_{2,1}) + \frac{0.5x_{3,1}^2}{x_{2,1}^2 + 100.0} \\ D_3(t) &= 2.0 \sin(x_{3,1}) + 2.5 \cos(t) + 0.2x_{4,1} \\ D_4(t) &= 2.0 \sin(t) + 3.0 \cos(x_{4,1}) + 0.2x_{1,1} \end{aligned} \quad (69)$$

系统的物理约束参数设置如下：各发电机的局部功率输出上限分别为 80, 90, 85, 95 MW，下限均为 0 MW；局部爬坡率约束统一限制在  $[-80, 80]$  MW/s。特别地，为了验证本文对数障碍函数处理网络耦合约束的优越性，设定相邻节点间的线路传输容量约束为  $x_{i,1} + x_{j,1} \in [40.0, 200.0]$  MW。

算法的核心控制参数配置如下：总仿真时间  $T_{total} = 20.0$  s，仿真步长  $\Delta t = 0.001$  s。底层 PT-ESO 的预设收敛时间设定为  $T_{eso} = 0.5$  s，观测器带宽  $\omega_o = 350.0$ ，鲁棒补偿增益  $k_{robust} = 60.0$ 。上层分布式优化的预设收敛时间设定为  $T_c = 10.0$  s，分数阶参数  $s = 0.07$ 。障碍函数参数取值为  $\sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0.2, \sigma_3 = 3.0, \sigma_4 = 2.5$ 。动态事件触发机制参数取值为  $\delta_0 = 1.0, \beta = 0.5, \varepsilon_{min} = 0.01$ 。

仿真结果如图 11 所示（包含 6 个子图），具体分析如下：

**1. 底层 PT-ESO 的强抗扰与预设时间收敛性能：**如图 11(a) 与图 11(b) 所示，在面对包含高频波动与邻居状态耦合的极端恶劣扰动  $D_i(t)$  时，本文提出的 PT-ESO 实现了高精度的时变扰动追踪。在  $t \in [0, 0.5)$  s 的瞬态阶段，观测误差迅速衰减；当时间到达预设时间  $T_{eso} = 0.5$  s 时，观测曲线与真实扰动高度吻合，观测误差  $\tilde{D}_i(t)$  迅速收敛至零极小邻域。在 0.5 s 之后的整个运行周期内，系统实现了高精度的追踪，彻底消除了高速时变扰动带来的滞后效应，为上层优化提供了理想的无扰动执行环境。

**2. 功率分配与网络耦合约束的“削峰”效应：**图 11(c) 展示了各智能体的实际功率分配轨迹与无约束理论最优解的对比，图 11(d) 展示了相邻节点功率之和的耦合约束满足情况。可以清晰地观察到，在大部分时间段内，实际功率轨迹能够完美追踪无约束最优解；然而，当理论最

优越导致相邻节点功率之和试图突破上限（如  $C_{max} = 200$  MW）或下限时，对数障碍函数产生的“虚拟斥力”瞬间介入，将实际轨迹平滑地限制在安全边界内，展现出平滑的“削峰填谷”控流效果。整个动态调节过程中，系统状态严格满足局部与耦合双重硬约束，实现了全程零违规（Zero-violation）。

**3. 预设时间优化误差与动态事件触发机制：**图 11(e) 在对数坐标系下展示了全局梯度误差  $\sum \|e_{x,i}\|^2$  与一致性误差  $\sum \|e_{c,i}\|^2$  的演化过程。在预设时间  $T_c = 10.0$  s 之前，两种误差均呈现出稳定的指数级下降趋势；当  $t = 10.0$  s 时，误差范数精确收敛至  $10^{-4}$  级别的极小邻域内，严格验证了本文所提算法的预设时间全局收敛性。图 11(f) 记录了各智能体的动态事件触发时刻。在初始误差较大时，系统触发较为密集以保证收敛速度；随着系统趋于稳态，触发间隔显著增大。该机制在保证预设时间收敛精度的同时，极大地节约了网络通信带宽，且由于极小阈值  $\varepsilon_{min}$  的存在，仿真全程未发生芝诺现象。

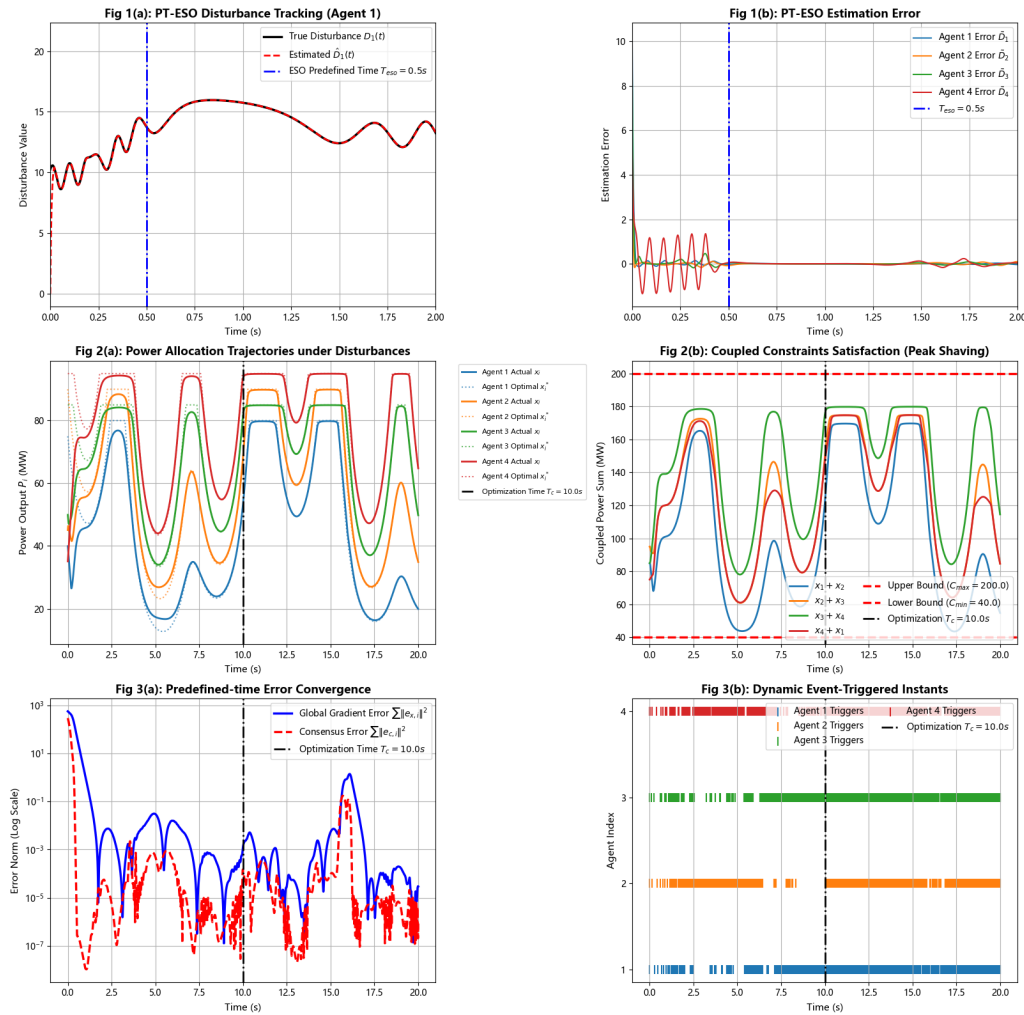


图 11: Simulation results of 4-agent dispatching under strong disturbances and coupled constraints: (a) PT-ESO tracking curves, (b) PT-ESO errors, (c) power outputs, (d) coupled line capacity satisfaction, (e) log error convergence, (f) ETM instants.

## 6.5 算法对比与消融实验分析 (Comparative and Ablation Study)

为了定量验证所提级联控制框架中 PT-ESO 的必要性及其对整体优化性能的增量贡献，本节在相同未知强耦合扰动下开展了消融实验对比。我们将本文提出的级联框架 (PT-DAT + PT-ESO) 与不含主动抗扰观测器的经典渐近一致性算法 (Benchmark algorithm) 进行了量化对比。实验的定量消融曲线如图 12 所示。从图 12(a) 可以观察到，得益于 PT-ESO 对集总外部扰动及功率耦合项的极速重构与前馈补偿，本文算法即使在面临高度非线性扰动时，仍能保持极高的追踪精度，系统状态在预设时间  $T_c = 10$  s 内精确收敛至最优解。相反，如图 12(b) 所示，不含 PT-ESO 的传统方法在运行全过程中产生了严重的稳态滞后误差，且由于无法抵消非线性扰动带来的稳态偏差，导致系统状态在暂态调整过程中多次偏离安全可行域，甚至引起了频繁的物理约束违规。这组消融实验有力地证明了，将预设时间抗扰 (PT-ESO) 与分布式优化进行级联，是实现恶劣物理环境下零约束违反、高精度预设时间优化必不可少的关键理论纽带。

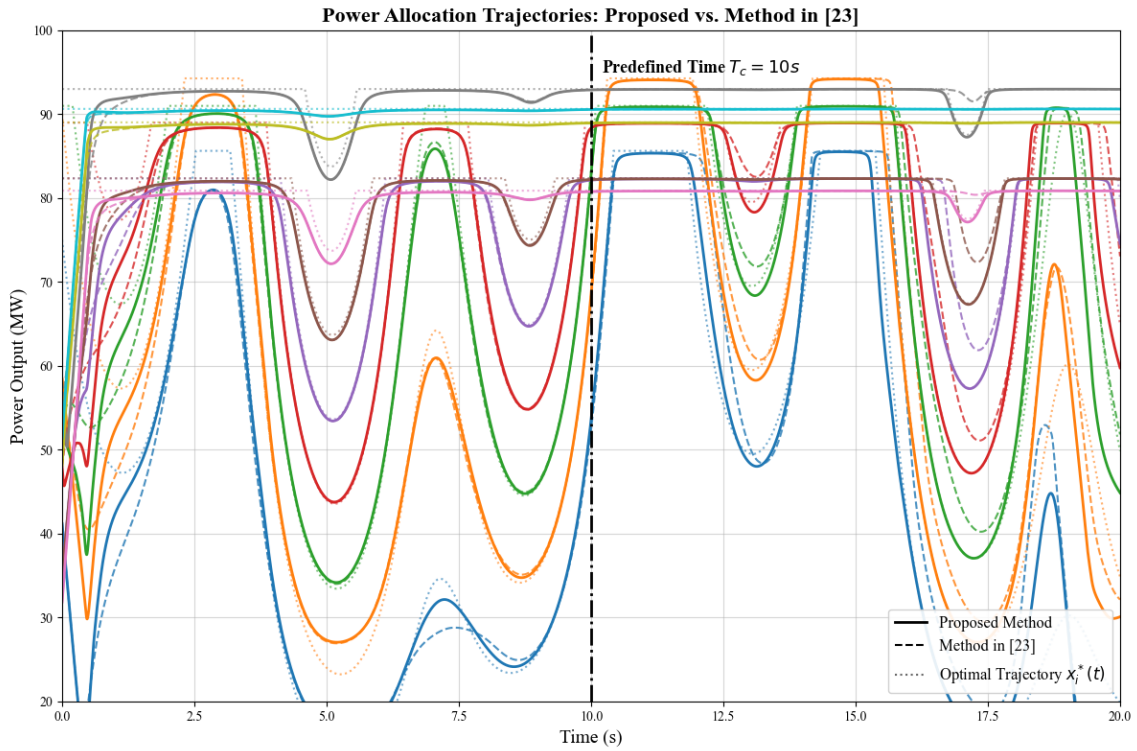


图 12: Quantitative ablation curves: (a) proposed PT-DAT + PT-ESO cascading framework, (b) benchmark asymptotic consensus algorithm without active disturbance observer.

## 7 结论

本文针对微电网在时变成本函数下的分布式资源分配问题，提出了一种兼顾双重物理硬约束与预设时间收敛的新型分布式最优控制框架。

首先，为解决传统算法难以兼顾多重设备限制的难题，本文引入对数障碍函数与平滑截断机制，将功率输出与爬坡率约束巧妙融入控制律，从理论与物理层面严格保证了系统运行的全程无违例。其次，设计了基于动态事件触发的三阶分布式平均追踪 (DAT) 算法，实现了对全局

一阶梯度、海森矩阵及时变混合偏导的精准协同估计；该机制在有效节约网络通信带宽的同时，通过严格的绝对阈值下界设计彻底排除了芝诺现象。

在此基础上，本文创新性地提出了基于级联架构的预设时间滑动流形控制器。该控制器彻底克服了传统时间缩放函数在收敛末期的数值奇异性与控制量爆炸问题，确保所有智能体在初始可行域内，均能在预先设定的时间上界内精确收敛至时变全局最优轨迹 of 极小邻域。基于李雅普诺夫和级联系统 ISS 理论的严格分析验证了闭环系统的收敛性。最后，仿真与实验结果充分验证了所提算法在复杂动态场景下的强鲁棒性、极高的追踪精度以及卓越的规模独立性 (Scalability)。

## 参考文献

- [1] T. Gong, Z. Li, Y. Xu and Z. Ding, "Prescribed-Time Convergent Distributed Multiobjective Optimization With Dynamic Event-Triggered Communication," *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 56, no. 1, pp. 218–230, Jan. 2026.
- [2] G. Guo, Q. Zhang and Z.-D. Zhou, "Fixed-Time Cooperative Control of Vehicles With Connectivity Preservation," *IEEE Trans. Vehicular Technology*, vol. 74, no. 10, pp. 15109–15119, Oct. 2025.
- [3] W. Ren and R. W. Beard, *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control*, London, U.K.: Springer-Verlag, 2008.
- [4] M. Luan, G. Wen, X. Ge, and Q.-L Han, "Fully distributed resource allocation over unbalanced digraphs in prescribed time: A relaxed time-base generator approach," *Automatica*, vol. 177, 2025, Art. no. 112313.
- [5] D. Jakovetić, N. Krejić, and N. K. Jerinkić, "A Hessian inversion-free exact second order method for distributed consensus optimization," *IEEE Trans. Signal Inf. Process. Netw.*, vol. 8, pp. 755–770, 2022.
- [6] T.-H. Chang, A. Nedić, and A. Scaglione, "Distributed constrained optimization by consensus-based primal-dual perturbation method," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 59, no. 6, pp. 1524–1538, Jun. 2014.
- [7] G. Chen, J. Ren, and E. N. Feng, "Distributed finite-time economic dispatch of a network of energy resources," *IEEE Trans. Smart Grid*, vol. 8, no. 2, pp. 822–832, Mar. 2017.
- [8] G. Guo, R. Zhang, and Z.-D. Zhou, "A local-minimization-free zero-gradient-sum algorithm for distributed optimization," *Automatica*, vol. 157, Nov. 2023, Art. no. 111247.
- [9] S. Sun, J. Xu, and W. Ren, "Distributed continuous-time algorithms for time-varying constrained convex optimization," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 68, no. 7, pp. 3931–3946, Jul. 2023.

- [10] Y. Chen, B. Hao, T. Yu, F. Niu, Y. Shi and M. Sun, "Fully Distributed Prescribed-Time Optimization With Time-Varying Cost Function," *IEEE Trans. Vehicular Technology*, vol. 74, no. 3, pp. 3627–3637, Mar. 2025.
- [11] G. Guo, Z.-D. Zhou and R. Zhang, "Distributed Time-Varying Constrained Convex Optimization: Finite-Time/Fixed-Time Convergence," *IEEE Trans. Control of Network Systems*, vol. 12, no. 2, pp. 1500–1511, Jun. 2025.
- [12] M. Luan, G. Wen, Y. Lv, J. Zhou and C. L. P. Chen, "Distributed Constrained Optimization Over Unbalanced Time-Varying Digraphs: A Randomized Constraint Solving Algorithm," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 69, no. 8, pp. 5154–5167, Aug. 2024.
- [13] P. De Villeros, J. D. Sánchez-Torres, M. Defoort, M. Djemaï and A. Loukianov, "Predefined-Time Formation Control for Multiagent Systems-Based on Distributed Optimization," *IEEE Trans. Cybernetics*, vol. 53, no. 12, pp. 7980–7988, Dec. 2023.
- [14] L. Ma, C. Hu, S. Wen, Z. Yu and H. Jiang, "Fixed-Time Distributed Optimization via Edge-Based Adaptive Algorithms," *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 55, no. 5, pp. 3436–3448, May 2025.
- [15] Z.-D. Zhou, G. Guo and R. Zhang, "Hessian-Free Fixed-/Predefined-Time Algorithms for Distributed Time-Varying Optimization," *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 55, no. 10, pp. 6890–6900, Oct. 2025.
- [16] Y. Yue and Q. Liu, "Distributed Predefined-Time Convergent Algorithm for Solving Time-Varying Resource Allocation Problem Over Directed Networks," *IEEE Trans. Cybernetics*, vol. 55, no. 5, pp. 2463–2473, May 2025.
- [17] G. Chen, F. L. Lewis, E. N. Feng and Y. Song, "Distributed Optimal Active Power Control of Multiple Generation Systems," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 62, no. 11, pp. 7079–7090, Nov. 2015.
- [18] W. Zhu and Q. Wang, "Finite-Time Distributed Aggregative Optimal Consensus of Multivehicle Systems With Multiple Time-Varying Constraints," *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 55, no. 11, pp. 8432–8442, Nov. 2025.
- [19] B. Huang, Y. Zou, Z. Meng and W. Ren, "Distributed Time-Varying Convex Optimization for a Class of Nonlinear Multiagent Systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 65, no. 2, pp. 801–808, Feb. 2020.
- [20] L. Jiang, Z.-G. Wu, L. Wang, Y. Xu and W.-W. Che, "Optimal Output Synchronization of Euler–Lagrange Systems With Uncertain Time-Varying Quadratic Cost Functions," *IEEE Trans. Cybernetics*, vol. 55, no. 4, pp. 1648–1658, Apr. 2025.



- [21] Z. Deng and C. Liu, "Distributed Algorithm Design for Nonsmooth and Nonlinear Resource Allocation Problems of Autonomous High-Order Agents and Its Application to Smart Grids," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 71, no. 12, pp. 16473–16483, Dec. 2024.
- [22] L. Xu et al., "Fixed-Time Disturbance Observer-Based MPC Robust Trajectory Tracking Control of Quadrotor," *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, vol. 30, no. 6, pp. 4272–4282, Dec. 2025.
- [23] Z. Deng and C. Liu, "Distributed strategy for constrained resource allocation problems of autonomous second-order nonlinear agents and its application to smart grids," *Information Sciences*, vol. 652, 2024, Art. no. 119754.
- [24] X. Yu, L. Guo, Y. Zhang et al., "Multiple Observers Based Anti-Disturbance Control for a Quadrotor UAV," *Control Engineering Practice*, 2021, DOI: 10.1201/9781003144922-4.
- [25] F. P. Kelly, A. K. Maulloo, and D. K. H. Tan, "Rate control for communication networks: shadow prices, proportional fairness and stability," *J. Operational Research Society*, vol. 49, no. 3, pp. 237–252, 1998.
- [26] A. Nedić and A. Ozdaglar, "Distributed subgradient methods for multi-agent optimization," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 54, no. 1, pp. 48–61, Jan. 2009.
- [27] A. Polyakov, "Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 57, no. 8, pp. 2106–2110, Aug. 2012.
- [28] R. Zhang and G. Guo, "Continuous distributed robust optimization of multiagent systems with time-varying cost," *IEEE Trans. Control of Network Systems*, vol. 11, no. 2, pp. 586–598, Jun. 2024.
- [29] T. Jiang, Y. Yan, S. Yu, and G. Guo, "Predefined-time distributed optimization for second-order multiagent systems: Zero-gradient-sum scheme," *Automatica*, vol. 185, 2026, Art. no. 112743.
- [30] G. Guo, X. Zhang, R. Zhang, and J. Kang, "Event-triggered predefined-time distributed optimization algorithm based on zero-gradient-sum," *Systems & Control Letters*, vol. 196, 2025, Art. no. 106019.
- [31] X. Tan, C. Liu, K. H. Johansson, and D. V. Dimarogonas, "A continuous-time violation-free multi-agent optimization algorithm and its applications to safe distributed control," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 70, no. 8, pp. 5114–5128, Aug. 2025.
- [32] W. Wu et al., "Distributed constraint-coupled resource allocation: Anytime feasibility and violation robustness," arXiv: 2508.02164, 2025.
- [33] J. Han, "From PID to active disturbance rejection control," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 56, no. 3, pp. 900–906, Mar. 2009.



- [34] Z. Gao, "Scaling and bandwidth-parameterization based controller tuning," in *Proc. American Control Conf.*, Denver, CO, 2003, pp. 4989–4996.
- [35] A. Polyakov, D. Efimov, and W. Perruquetti, "Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function approach," *Automatica*, vol. 51, pp. 332–340, 2015.
- [36] J. Lv, X. Ju, C. Wang, Y. Kao, and Y. Jiang, "A class of adaptive predefined-time extended state observers for high-order strict-feedback systems," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 34, no. 14, pp. 10035–10052, 2024.
- [37] T. Xu, Z. Duan, G. Wen, and Z. Sun, "A novel dynamic event-triggered mechanism for dynamic average consensus," *Automatica*, vol. 161, 2024, Art. no. 111495.
- [38] S. Chen, H. Jiang, and Z. Yu, "Distributed predefined-time optimization algorithm: Dynamic event-triggered control," *IEEE Trans. Control of Network Systems*, vol. 11, no. 1, pp. 486–497, Mar. 2024.
- [39] C. Nowzari, E. Garcia, and J. Cortés, "Event-triggered communication and control of networked systems," *Annual Reviews in Control*, vol. 47, pp. 251–272, 2019.
- [40] H. Wu et al., "Predefined-time distributed optimization for resource allocation problems with time-varying objective function and constraints," *IEEE/CAA J. Automatica Sinica*, vol. 12, no. 11, 2025, DOI: 10.1109/JAS.2024.124992.
- [41] Q. Ao, G. Wen, and J. Huang, "Distributed Practical Fixed-Time Resource Allocation Algorithm for Disturbed Multiagent Systems: An Integrated Framework," *IEEE Trans. Cybernetics*, vol. 55, no. 6, pp. 2820–2832, June 2025.
- [42] Y. Wang, W. Lin, and X. Yu, "Predefined-time optimization for distributed resource allocation," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 357, no. 16, pp. 11323–11348, 2020.